ISSN 2219-5256

ВЕСТНИК

ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕР-СИТЕТА

Серия «Естественные, общественные науки»

Вып. 2, 2014 **Биология. Химия. Физика. Математика**

Научный журнал **Издается с 2000 года**

Подписной индекс
в каталоге «Пресса России» 41512

Электронная копия журнала размещена
на сайтах www.elibrary.ru, www.ivanovo.ac.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Биология

Химия

Физика

Математика

Адрес редакции:
153025 Иваново, ул. Ермака, 39, к. 362
тел./факс (4932) 32-66-00
e-mail: dipol53@mail.ru

Над выпуском работали:
директор издательства *Л. В. Михеева*
редакторы: *О. В. Боронина*, *О. А. Кручинина*
технический редактор *И. С. Сибирева*
компьютерная верстка *Г. Б. Клецкина*

ВЕСТНИК
ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия «Естественные, общественные науки»
2014. Вып. 2. Биология. Химия. Физика. Математика

Подписано в печать 12.07.2014 г. Формат $70 \times 108^1/_{16}$. Бумага писчая.
Печать плоская. Усл. печ. л. 11,2. Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 200 экз.

Издательство «Ивановский государственный университет»
✉ 153025 Иваново, ул. Ермака, 39 ☏ (4932) 93-43-41
E-mail: publisher@ivanovo.ac.ru

ISSN 2219-5256

IVANOVO STATE UNIVERSITY BULLETIN

Series «Natural, Social Sciences»

Issue 2, 2014 Biology. Physics. Chemistry. Mathematics

Scientific journal Issued since 2000

Index of subscription
in the catalogue «Russian Press» 41512

Electronic copy of the journal can be found
on the web-sites www.elibrary.ru,
www.ivanovo.ac.ru

CONTENTS

Biology

Chemistry

Physics

Mathematics

Address of the editorial office:
153025, Ivanovo, Ermak str., 39, office 362
tel./fax (4932) 32-66-00
e-mail: dipol53@mail.ru

Editorial staff:
Publishing house director *L. V. Mikheeva*
Editors: *O. V. Boronina*, *O. A. Kruchinina*
Technical editor *I. S. Sibireva*
Computer layout *G. B. Klyotskina*

УДК 581.9 (470.315)

Е. А. Борисова

ИТОГИ ИЗУЧЕНИЯ ФЛОРЫ И РАСТИТЕЛЬНОСТИ ИВАНОВСКОЙ ОБЛАСТИ

Приводятся сведения об основных публикациях по флоре и растительности Ивановской области. Кратко охарактеризованы ключевые направления и итоги флористических исследований. В целом материалы по флоре и растительности области опубликованы в 36 монографиях и более чем в 700 научных статьях.

Ключевые слова: изучение флоры и растительности, Ивановская область.

The data about flora and vegetation of the Ivanovo region study are given. The main ways and results of the floristic researches are characterized briefly. The materials about flora and vegetation in the Ivanovo region are published in 36 monographs and more than 700 scientific articles.

Key words: flora and vegetation study, the Ivanovo region.

История изучения флоры и растительности Ивановской области началась еще с XVIII в., с путевых заметок П. С. Палласа [24]. Первыми флористическими сводками можно считать работы А. Н. Островского [23], В. Я. Цингера [36], И. Ф. Мейснера [22], А. Ф. Флерова [33], А. Е. Жадовского [14, 15 и др.].

В 1920-х гг. практически сразу после образования Иваново-Вознесенской губернии и организации Иваново-Вознесенского политехнического института под руководством профессора А. А. Хорошкова были организованы полевые исследования различных уездов. В результате был собран большой фактический материал, гербарий, основная часть которого хранится в фондах Ивановского государственного историко-краеведческого музея им. Д. Г. Бурылина, опубликованы новые данные о флоре [34, 35 и др.]. В 1919—1929 гг. в области работали известные болотоведы Н. Я. Кац и Д. П. Мещеряков, которые изучили растительность некоторых крупных верховых болот [16, 22 и др.]. Растительные сообщества оз. Валдайское хорошо описаны Н. В. Козулиным и Л. Я. Чернышовой [18].

Флоре и растительности лугов по берегам рек Нерль и Теза посвящены совместные работы В. М. Пчелкина и Н. А. Антипина [3, 27].

В 1920—1930 гг. активно изучались сорная флора и растительность. Были опубликованы работы А. И. Прохорова [25], Н. А. Антипина [2], К. Н. Антошина [4]. В 1938 г. В. М. Пчелкин обобщил сведения о сорной флоре и растительности Ивановской промышленной области [26]. В этой работе приведены сведения о 197 видах сорных растений, особенностях их распространения (составлены картосхемы для редких сорняков) и обилия.

Нельзя не сказать о фундаментальной работе С. А. Стулова [31], изучившего растительность Клязьминского государственного заповедника, организованного в 1935 г. В ней дан аннотированный конспект с описанием 373 видов сосудистых растений, описано распространение редких видов, приводятся подробные описания различных типов лесной, луговой, водной и прибрежно-водной растительности долины р. Клязьмы.

В 1940-х гг. сотрудники Ивановского сельскохозяйственного института К. П. Алявдина и В. П. Виноградова подготовили определитель растений Ивановской области, который был опубликован под редакцией О. Н. Шалыгановой только в 1972 г. [1]. В определителе приводятся данные о 962 видах сосудистых растений, однако отсутствуют сведения о распространении видов по территории области и конкретные местонахождения редких видов, что существенно снижает научную ценность данного издания.

В 1977 г. после организации кафедры ботаники Ивановского государственного университета под руководством М. П. Шилова стали проводиться исследования по изучению флоры и растительности Ивановской и Владимирской областей, изучались ресурсы лекарственных растений, причем особое внимание уделялось редким и находящимся под угрозой исчезновения видам.

В конце 1970-х гг. О. Н. Шалыгановой и М. П. Шиловым были опубликованы данные о новых и редких видах растений Ивановской области [37, 38 и др.]. В 1980—1990-х гг. несколько обобщающих публикаций было издано М. П. Шиловым, в частности учебные пособия «Памятники природы Ивановской области» [39], «Местная флора» [40] и др.

С 1970-х гг. в Ивановском университете формировался научный гербарий, в котором к настоящему времени насчитывается более 25 000 листов. В 2007 г. данный гербарий был зарегистрирован в Международной системе *Index Herbarium* и получил Международный акроним — IVGU. Значение гербарных коллекций очень важно как для научно-исследовательской работы, так и для преподавания всех ботанических дисциплин.

С конца 1980-х гг. флористические исследования активно проводятся на территории Плесского музея-заповедника. Выпускники ИвГУ М. А. Голубева и А. И. Сорокин основательно изучают флору сосудистых растений и мхов, редких и находящихся под угрозой исчезновения видов. С 1986 г. был организован гербарий, получивший Международный акроним — PLES. Особо отметим монографию этих ученых «Флора г. Плёса» [13].

В 1988—1993 гг. в исследованиях флоры и растительности нашей области активное участие принимала профессор Мордовского государственного университета Т. Б. Силаева. В результате совместных исследований в этот период были найдены новые виды заносных растений, отмечены новые местонахождения редких видов, опубликовано ряд статей [41, 42]. В период с 2008 по 2012 г., приезжая в г. Иваново, Татьяна Борисовна продолжает принимать участие в совместных полевых исследованиях, например в обследованиях долины р. Нерль [8], оз. Валдайское, популяций редких видов в Тейковском районе.

С 1990-х гг. специально изучается адвентивный компонент флоры Ивановской области. В результате был полностью выявлен ее состав, изучены особенности формирования, структуры, определены динамические тенденции. В 2007 г. была опубликована монография «Адвентивная флора Ивановской области» [6]. В 2008 г. выявлены основные закономерности, направленность, пространственно-временные тренды процессов антропогенной трансформации флоры Верхневолжского региона, охарактеризованы пути и способы заноса, особенности натурализации адвентивных видов.

Работа по изучению заносных и инвазионных видов Верхневолжского региона активно продолжается и в настоящее время. Исследования проходят в рамках Международного долгосрочного проекта «Global Invasion Network».

Итогом изучения редких и нуждающихся в охране видов растений стала публикация в 2010 г. Красной книги Ивановской области (т. 2, «Растения и грибы» [19]). В данной книге, которая является основным официальным документом в области охраны, содержатся сведения о 149 видах сосудистых растений и 7 видах грибов. 9 видов растений занесены в Красную книгу Российской Федерации.

В 2011—2013 гг. при финансовой поддержке Комитета Ивановской области по природопользованию активно проводились работы по ведению региональной Красной книги. Были организованы полевые исследования 12 административных районов. Материалы по ведению региональной Красной книги были опубликованы в двух специальных монографиях [28, 29].

Большая работа проводится по изучению флоры особо охраняемых природных территорий Ивановской области, совершенствованию сети ООПТ и ее интеграции в систему европейского уровня. Составлены полные аннотированные конспекты флоры более 20 ООПТ регионального уровня. Изучен состав, структура и динамика флоры Федерального заказника «Клязьминский» [9, 18, 20 и др.]. Стационарные исследования флоры и мониторинг популяций редких видов растений проводятся в окрестностях оз. Рубское на базе спортивно-оздоровительного лагеря ИвГУ.

В течение последних лет выявлено более 15 территорий особого природного значения, которым рекомендовано присвоить статус ООПТ. 9 территориям области присвоен статус перспективных («candidate») участков Изумрудной сети. Сведения о них были опубликованы в коллективной монографии «Изумрудная книга Российской Федерации» [32].

В 2013 г. на основе проведенных комплексных экологических обследований 8 памятников природы (озера: Рубское, Валдайское, Красный Остров, Серковское, Высоковское, Святое, Уводьское водохранилище и болото Ламненское) опубликован сборник [12].

Материалы изучения ареалов распространения видов сосудистых растений Ивановской области начиная с 1996 г. ежегодно передаются в координационный центр долгосрочного Международного проекта «Atlas Flora Europaea (Distribution Maps of Vascular plants)». За 1996—2013 гг. было опубликовано 6 томов [43, 44, 45 и др.].

С 2003 г. систематически изучаются флоры городов и других населенных пунктов Ивановской области. Студентами кафедры общей биологии и ботаники выполнены дипломные работы по флоре городов: Кинешма, Гаврилов-Посад, Пучеж, Кохма, Родники, Юрьевец, Южа, Тейково, Шуя, Заволжск, Комсомольск, пос. Савино, Демидово, Лух, Ильинское и др. Сведения о флоре малых городов Ивановской области обобщены старшим преподавателем И. В. Сенюшкиной [10, 30 и др.]. Ею составлен полный аннотированный конспект флоры малых городов области, проведен комплексный анализ, выявлены особенности урбанофлор, создается база данных.

Студентами и преподавателями ИвГУ активно проводятся исследования флоры техногенных экотопов области. Изучены особенности парциальных флор железных дорог, обочин шоссейных дорог, экотопов ТЭЦ-2 и ТЭЦ-3, залежей, антропогенных пустырей, полигонов отходов, песчаных карьеров.

С 2008 г. в рамках Всероссийского научного проекта «Окская флора» специально анализируется флора районов бассейна р. Клязьмы.

Одним из направлений флористических исследований является изучение сохранившихся старинных усадебных парков — уникальных природно-исторических комплексов. Обследованы территории более 30 дворянских, помещичьих и купеческих усадеб различных районов Ивановской области [7, 11 и др.].

Специально изучается флора пригородных лесов Иванова, Кинешмы и Шуи, обследованы леса Уводьского, Ивановского, Талицкого лесничеств [5]. Особое внимание обращается на изменения структуры лесных сообществ, внедрение в их состав инвазионных видов.

Не остаются без внимания вопросы озеленения населенных пунктов нашей области, состав дендрофлоры и мероприятия по оптимизации городской среды. Изучается видовое и сортовое разнообразие представителей крупных и сложных в таксономическом отношении родов деревьев и кустарников, например боярышника — *Crataegus,* тополя — *Populus,* шиповника — *Rosa*, ивы — *Salix*, спиреи — *Spirea* и др. Хорошо изучен видовой состав дендрофлоры Иванова, Родников, Шуи, Кинешмы и пос. Пестяки.

В целом материалы по флоре и растительности Ивановской области, в том числе данные о новых, впервые обнаруженных видах, результатах мониторинга популяций редких и инвазионных растений опубликованы в 36 монографиях и более чем в 700 научных статьях.

Однако в области пока остаются районы, слабо изученные во флористическом отношении, не обследованы многие ООПТ регионального и местного значения, долины малых рек, некоторые уникальные экосистемы не имеют статусов охраняемых территорий. Поэтому работы по изучению флоры и растительности нашей области будут продолжены в рамках долгосрочных международных, российских и региональных научных проектов.

Библиографический список

1. *Алявдина К. П., Виноградова В. П.* Определитель растений / под ред. О. Н. Шалыгановой. Ярославль : Верх.-Волж. кн. изд-во, 1972. 399 с.
2. *Антипин Н. А.* Сорная флора района Уткинской болотной станции и связь ее с окружающей посевы растительностью // Изв. Иван.-Вознесен. политехн. ин-та. 1929. Т. 14. С. 115—133.
3. *Антипин Н. А., Пчелкин В. М.* Заливные луга по р. Нерли // Тр. Иван.-Вознесен. науч. о-ва краевед. 1929. Вып. 6. С. 7—57.
4. *Антошин К. Н.* Сорная растительность опытного поля и его окрестностей (с. Богородское) // Изв. Иван.-Вознесен. политехн. ин-та. 1929. Т. 14. С. 25—33.
5. *Борисова Е. А*. Флористическое загрязнение пригородных лесов г. Иваново // Экология. 2006. № 3. С. 168—172.
6. *Борисова Е. А.* Адвентивная флора Ивановской области. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2007. 188 с.
7. *Борисова Е. А.* Редкие виды растений в усадебных парках Ивановской области // Экология и культура: от прошлого к будущему. Ярославль : Индиго, 2010. С. 38—45.
8. *Борисова Е. А., Голубева М. А, Силаева Т. Б., Шилов М. П.* Интересные флористические находки в окрестностях сел Кибергино и Стебачово Ивановской области // Борисовский сб. / отв. ред. В. В. Возилов. Иваново : Референт, 2009. Вып. 1. С. 171—178.

9. *Борисова Е. А., Курганов А. А.* Адвентивные виды растений во флоре заказника «Клязьминский» // Роль ботанических садов и охраняемых природных территорий в изучении и сохранении разнообразия растений и грибов. Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2011. С. 214—216.
10. *Борисова Е. А., Сенюшкина И. В.* Сравнительный анализ флоры городов Ивановского Поволжья // Фундаментальные и прикладные проблемы ботаники в начале XXI в. : материалы XII съезда Русского ботан. о-ва. Петрозаводск, 2008. Ч. 4 : Сравнительная флористика и урбанофлористика. С. 154—157.
11. *Борисова Е. А., Сенюшкина И. В., Сидорова Ю. Я.* Флора старого усадебного парка Севрюговых в г. Кинешма // Историко-культурный и природный потенциал кинешемского края. Кинешма, 2012. С. 173—177.
12. Водные объекты, расположенные на особо охраняемых природных территориях Ивановской области / под ред. Е. А. Борисовой. Иваново : ПресСто, 2013. Вып. 1 : Озера Валдайское, Высоковское, Красный Остров, Серковское, Святое, Рубское, болото Ламненское, Уводьское водохранилище. 88 с.
13. *Голубева М. А., Сорокин А. И.* Флора города Плёса. Плёс : Плёсский музей-заповедник, 2009. 112 с.
14. *Жадовский А. Е.* Ботанические исследования в Костромской губернии летом 1913 // Тр. Костром. науч. о-ва по изучению местного края. 1914. Вып. 2. С. 3—33.
15. *Жадовский А. Е.* Ботанические экскурсии в окрестностях г. Кинешмы // Вестн. Кинешем. земства. 1915. № 9. С. 1—36.
16. *Кац Н. Я.* Материалы к геоботаническим исследованиям болот Иваново-Вознесенской губернии в 1919—1920 гг. Ч. 1 : Писцовские болота Тейковского уезда // Изв. науч.-эксперим. торф. ин-та. М., 1922. № 3/4. С. 25—48.
17. *Козулин Н. В., Чернышева Л. Я.* Растительные сообщества Валдайского озера // Тр. Иван.-Вознесен. губ. науч. о-ва краеведения. Иваново-Вознесенск, 1925. Вып. 3. С. 82—106.
18. *Кондаков Н. В., Борисова Е. А.* Редкие виды растений во флоре Клязьминского боброво-выхухолевого заказника // Флористические исследования в Центральной России на рубеже веков. М. : Изд-во Ботан. сада МГУ, 2001. С. 79—81.
19. Красная книга Ивановской области / Е. А. Борисова, М. А. Голубева, В. А. Исаев, Л. Ю. Минеева ; под ред. В. А. Исаева. Иваново : ПресСто, 2010. Т. 2 : Растения и грибы. 192 с.
20. *Курганов А. А., Борисова Е. А.* Виды Красной книги Ивановской области на территории Федерального заказника «Клязьминский» : материалы XIII съезда Русского ботан. о-ва. Тольятти, 2013. С. 30—31.
21. *Мейснер И. Ф.* Материалы для флоры Костромской губернии // Материалы к познанию фауны и флоры Российской империи. М., 1889. Вып. 3. 66 с. (Отд. ботан.).
22. *Мещеряков Д. П.* Геологический очерк болота Уткинской болотной опытной станции // Изв. Иван.-Вознесен. политехн. ин-та. Иваново-Вознесенск : Красный Октябрь, 1929. Т. 14. С. 135—150.
23. *Островский А. Н.* Первые сведения о флоре Костромской губернии // Изв. Моск. ун-та. 1867. № 5. С. 1—42.
24. *Паллас П. С.* Путешествие по разным провинциям Российской империи. СПб. : Акад. наук, 1773. Ч. 1 : (1768—1769 гг.). 667 с.
25. *Прохоров А. Н.* Зерно культурных полевых растений крестьянских хозяйств Иваново-Вознесенской губернии и его засоренность в урожае 1924 года // Изв. Иван.-Вознесен. политехн. ин-та. 1927. Т. 10. С. 93—110.
26. *Пчелкин В. М.* Сорная растительность и меры борьбы с ней в Ивановской и Ярославской областях : дис. ... канд. биол. наук. Иваново, 1938. 183 с.
27. *Пчелкин В. М., Антипин Н. А.* Заливные луга по р. Тезе. Иваново-Вознесенск, 1927. 47 с.
28. Редкие растения : материалы по ведению Красной книги Ивановской области / Е. А. Борисова, М. А. Голубева, А. И. Сорокин, М. П. Шилов ; под ред. Е. А. Борисовой. Иваново : ПресСто, 2011. 114 с.

29. Редкие растения и грибы : материалы по ведению Красной книги Ивановской области / Е. А. Борисова, М. П. Шилов, М. А. Голубева, А. И. Сорокин, Л. Ю. Минеева ; под ред. Е. А. Борисовой. Иваново : ПресСто, 2013. 124 с.

30. *Сенюшкина И. В., Борисова Е. А.* Сравнительный анализ флор малых городов юга Ивановской области // Материалы XIII съезда Русского ботан. о-ва. Тольятти, 2013. Т. 2 : Сравнительная флористика. С. 128—129.

31. *Стулов С. А.* Растительность Клязьминского государственного заповедника // Тр. Клязьминского гос. заповедника. 1939. Вып. 1. С. 3—76.

32. Территории особого природного значения Европейской России / Е. А. Борисова, М. А. Голубева, А. И. Сорокин, М. П. Шилов // Изумрудная книга Российской Федерации. М. : Ин-т географии РАН, 2013. Ч. 1 : Территории особого природного значения Ивановской области. С. 67—69.

33. *Флеров А. Ф.* Флора Владимирской губернии // Тр. о-ва естествоиспыт. при император. Юрьевском ун-те. 1902. Т. 10. С. 3—338.

34. *Хорошков А. А.* Ботанические исследования Иваново-Вознесенской губернии // Изв. Иван.-Вознесен. политехн. ин-та. 1921. Вып. 4. С. 1—7.

35. *Хорошков А. А.* Материалы для флоры Иваново-Вознесенской губернии // Бюл. МОИП. Отд. биол. 1925. Т. 33, вып. 3/4. С. 244—257.

36. *Цингер В. Я.* Сборник сведений о флоре Средней России // Учен. зап. Император. Моск. ун-та. М., 1885. Вып. 6. 520 с.

37. *Шалыганова О. Н.* Редкие и охраняемые растения // Природа Ивановской области. Ярославль, 1964. Вып. 3. С. 86—105.

38. *Шилов М. П., Шалыганова О. Н.* Редкие и исчезающие растения Ивановской области, их значение и охрана. Иваново, 1979. 22 с.

39. *Шилов М. П.* Памятники природы Ивановской области : учеб. пособие. Иваново : Иван. гос. ун-т, 1980. 98 с.

40. *Шилов М. П.* Местная флора : учеб. пособие. Иваново : Иван. гос. ун-т, 1989. 96 с.

41. *Шилов М. П., Силаева Т. Б., Борисова Е. А.* Новые и редкие для флоры Ивановского Поволжья растения // Проблемы изучения Плёса. Плёс, 1990. С. 90—92.

42. *Шилов М. П., Силаева Т. Б., Борисова Е. А.* Новые адвентивные виды растений во флоре Ивановской области // Иваново-Вознесенский край: история и современность. Иваново : Иван. гос. ун-т, 1992. С. 88—90.

43. Rosaceae (Spirea to Fragaria, excl. Rubus) // Atlas Florae Europaeae : distribution of vascular plants in Europe. Helsinki : Vam. kirjap. Oy Vammala Sastamala, 2004. Vol. 13. 320 p.

44. Rosaceae (Rubus) // Atlas Florae Europaeae : distribution of vascular plants in Europe. Helsinki : Vam. kirjap. Oy Vammala Sastamala, 2010. Vol. 15. 362 p.

45. Rosaceae (Cydonia to Prunus, excl. Sorbus) // Atlas Florae Europaeae : distribution of vascular plants in Europe / A. Curto, A. Sennikov, R. Lampinen. Helsinki : Vam. Kirjap. Oy Vammalan Sastamala, 2013. Vol. 16. 168 p.

УДК 612.821

В. Н. Зарипов, М. О. Баринова

ВЛИЯНИЕ УМСТВЕННЫХ НАГРУЗОК НА ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ СТУДЕНТОК С РАЗНЫМ ТИПОМ ТЕМПЕРАМЕНТА

Приводятся данные об изменениях вегетативной регуляции деятельности сердца под влиянием умственных нагрузок различной интенсивности.

Ключевые слова: умственные нагрузки, темперамент, вариабельность сердечного ритма.

The data about cardiac performance vegetative regulation changes under the influence of intellectual activities of different intensity are given.

Key words: intellectual activities, temperament, heart rate variability.

Основным занятием студентов является умственный труд, сопровождающийся значительным напряжением психических процессов. Для выполнения такого вида деятельности требуется мобилизация функциональных резервов организма, прежде всего сердечно-сосудистой системы. Индивидуальные особенности реагирования организма на умственную нагрузку и его функциональное состояние, по нашему мнению, зависят от свойств темперамента конкретного человека.

Целью данного исследования является оценка влияния умственных нагрузок различной интенсивности на функциональное состояние студенток с разным типом темперамента.

Материал и методы исследования

В исследовании приняли участие 32 студентки биолого-химического факультета Ивановского государственного университета.

На предварительном этапе было проведено психологическое тестирование, включающее оценку типа темперамента по тесту Г. Айзенка, на основании которого студентки (общая группа) были разделены на три группы в зависимости от преобладающего типа темперамента: сангвиники (25 %), меланхолики (31 %), холерики (44 %).

Затем для оценки возможных изменений вегетативного статуса у студенток каждой из групп регистрировали электрокардиограмму в положении «лежа» и «стоя». В дальнейшем проводили анализ спектральных показателей вариабельности сердечного ритма.

Обследования студенток выполнены в дни обычных учебных занятий во время семестра, при использовании слабой и сильной умственных нагрузок. В качестве умственных нагрузок использовали компьютерные версии общепринятых в психологии тестов на IQ: слабая умственная нагрузка — тест для детей; сильная умственная нагрузка — тест для взрослых.

Достоверность изменений оценивали по t-критерию Стъюдента.

Результаты исследования и их обсуждение

В общей группе студенток спектральные показатели вариабельности сердечного ритма достоверно не изменяются (рис. 1, 2). В последнее время подчеркивается необходимость индивидуального подхода к изучению стрессорных реакций, т. к. при вычислении среднестатистических норм зачастую «смазываются» важные закономерности реагирования отдельных индивидуумов, отличающихся по физиологическим или психологическим показателям [5]. Поэтому в данной работе осуществлен анализ физиологических реакций студентов, различающихся по преобладающему типу темперамента.

При слабой умственной нагрузке в положении «лежа» у студенток группы сангвиников происходит смещение вегетативного статуса в сторону преобладания парасимпатической регуляции, о чем свидетельствует достоверное уменьшение показателя LF на фоне увеличения показателя HF и, соответственно, снижение их соотношения LF/HF (рис. 1). Показатели LF связывают с уровнем функционирования симпатической нервной системы [4]. Показатель HF отражает вагусный контроль сердечного ритма, т. е. колебания парасимпатического отдела вегетативной нервной системы [3]. Соотношение LF/HF отражает соотношение симпатической и парасимпатической регуляции [7]. Таким образом, реакция на слабые умственные нагрузки, характерная для студенток группы сангвиников, сопровождается усилением вагусной регуляции деятельности сердечного ритма, что свидетельствует о хорошей адаптированности организма.

При сильной умственной нагрузке в положении «стоя» у студенток группы сангвиников изменения вегетативного статуса связаны с возрастанием симпатических влияний, на что указывает достоверное повышение показателя LF, а у студенток группы меланхоликов — с усилением гуморальной регуляции, о чем свидетельствует достоверное возрастание доли очень медленных низкочастотных волн — показатель VLF (рис. 2). Данная спектральная составляющая сердечного ритма является чувствительным индикатором управления метаболическими процессами и хорошо отражает энергодефицитные состояния [6]. Таким образом, при сильной умственной нагрузке у студенток группы сангвиников происходит смещение вегетативного гомеостаза в сторону преобладания симпатического звена регуляции, что позволяет судить об активации функциональных резервов организма для достижения поставленной цели и свидетельствует о более адекватной подготовленности регуляторных систем организма студенток данной группы к выполнению умственных нагрузок. В то же время у студенток группы меланхоликов имеет место реакция на сильную умственную нагрузку в виде увеличения гуморальной регуляции деятельности сердца, что указывает на значительное напряжение вегетативных систем организма при решении мыслительных заданий и, вероятно, свидетельствует о стрессовой ситуации.

Полученные данные подтверждают выдвинутое В. Н. Зариповым и М. О. Бариновой [1, 2] предположение о том, что судить о степени устойчивости субъектов к повреждающему действию стрессогенных факторов целесообразнее всего по оценке напряжения вегетативных систем в ответ на слабые стрессорные воздействия.

Таким образом, выявленное групповое разнообразие физиологических показателей деятельности сердечного ритма у студенток при умственных нагрузках обусловлено преобладающим типом темперамента. Причем

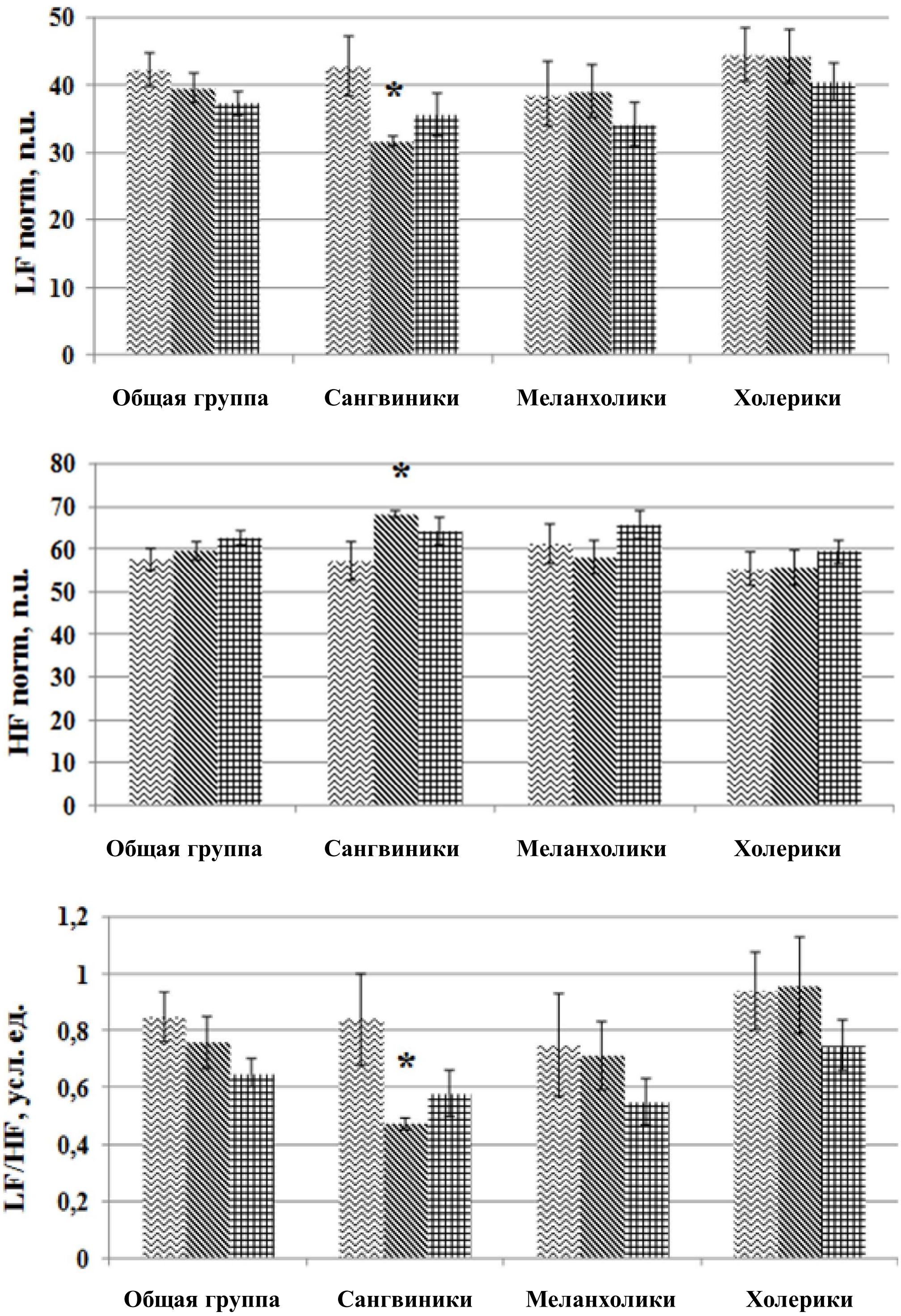


Рис. 1. Изменение показателей вариабельности сердечного ритма в положении «лежа» у студенток с разным типом темперамента под влиянием умственных нагрузок различной интенсивности:

— норма; — слабая нагрузка; — сильная нагрузка.

Достоверность отличий: норма — слабая нагрузка: * — $p < 0,05$

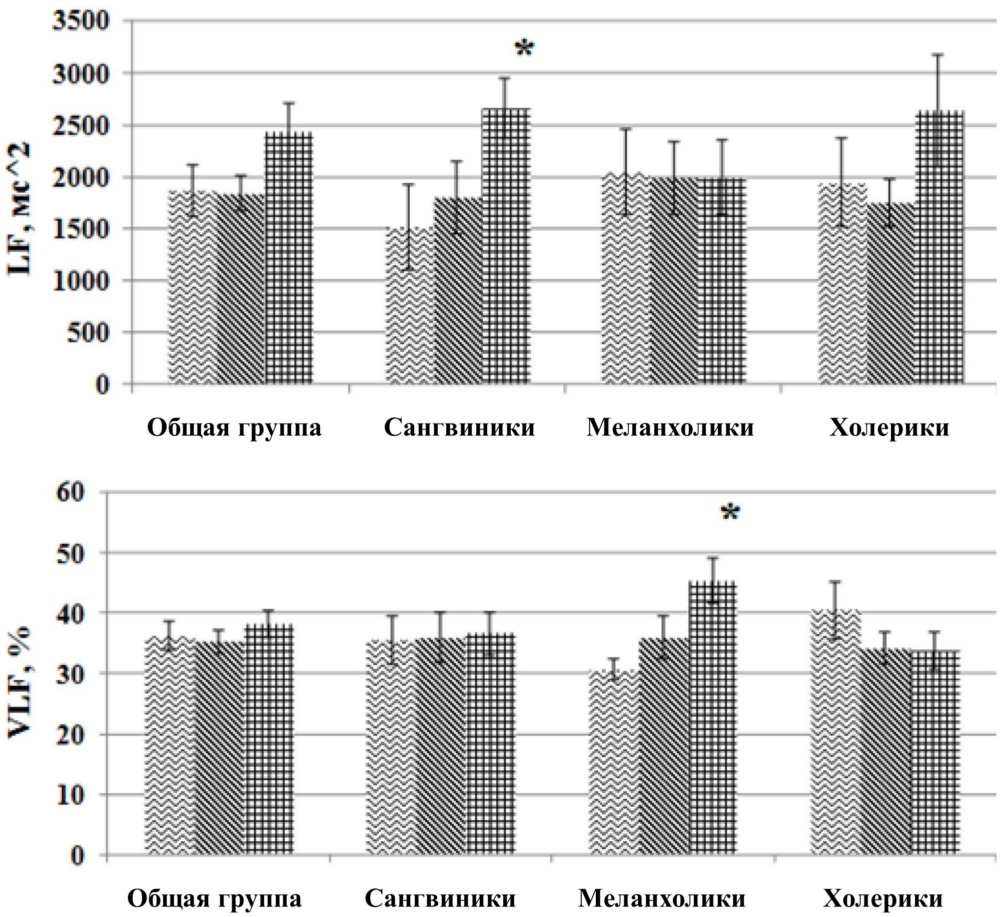


Рис. 2. Изменение показателей вариабельности сердечного ритма
в положении «стоя» у студенток с разным типом темперамента
под влиянием умственных нагрузок различной интенсивности:
— норма; — слабая нагрузка; — сильная нагрузка.
Достоверность отличий: норма — сильная нагрузка: * — $p < 0{,}05$

у студенток группы холериков не выявлено достоверных изменений спектральных показателей вариабельности сердечного ритма. Поскольку у данных студенток отсутствует ответная реакция на умственные нагрузки, то, вероятно, кроме типа темперамента, необходимо учитывать другие их индивидуальные особенности, например принимать во внимание психоэмоциональное напряжение субъекта.

Выводы

1. У студенток общей группы под влиянием умственных нагрузок различной интенсивности вегетативный статус не изменяется.

2. У студенток группы сангвиников при слабой умственной нагрузке выявлено усиление вагусной регуляции деятельности сердца, что свидетельствует об их хорошей адаптированности, а при сильной умственной нагрузке возрастает вклад симпатической регуляции, что является адекватной ответной реакцией на нагрузку.

3. У студенток группы меланхоликов изменения вегетативного статуса наблюдаются только при сильной умственной нагрузке и характеризуются повышением гуморальной регуляции деятельности сердца, что указывает на значительное напряжение вегетативных систем.

4. У студенток группы холериков не обнаружено достоверных изменений вегетативного статуса в зависимости от интенсивности умственной нагрузки.

Библиографический список

1. *Зарипов В. Н., Баринова М. О.* Изменения показателей кардиоинтервалографии и вариабельности ритма сердца у студентов с разным уровнем психоэмоционального напряжения и типом темперамента на зачетной неделе // Физиология человека. 2008. Т. 34. № 4. С. 73—79.
2. *Зарипов В. Н., Баринова М. О.* Изменения показателей сердечного ритма у студентов с разным уровнем психоэмоционального напряжения во время сдачи экзаменов // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 3. URL: http://www.science-education.ru/rules/ (дата обращения: 23.02.2014).
3. *Котельников С. А., Ноздрачев А. Д., Одинак М. М.* Вариабельность ритма сердца: представления о механизмах // Физиология человека. 2002. Т. 28, № 1. С. 130—143.
4. *Рябыкина Г. В., Соболев А. В.* Вариабельность ритма сердца. М. : Оверлей, 2000. 200 с.
5. *Судаков К. В.* Индивидуальная устойчивость к эмоциональному стрессу. М. : Наука, 1998. 267 с.
6. *Флейшман А. Н.* Медленные колебания гемодинамики. Новосибирск : Наука, 1999. 264 с.
7. *Яблучанский Н. И., Мартыненко А. В.* Вариабельность сердечного ритма в помощь практическому врачу : для настоящих врачей. Харьков : Основа, 2010. 215 с.

УДК 576.895.771

В. А. Исаев

ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ И ХРОМОСОМНЫЙ АНАЛИЗ МОКРЕЦОВ (DIPTERA, CERATOPOGONIDAE)

Обсуждаются экология и кариотипы, метафазные и политенные хромосомы мокрецов (Diptera: Ceratopogonidae).

Ключевые слова: экология, кариотипы, политенные и метафазные хромосомы, мокрецы, Ceratopogonidae.

The article contains the discussion about ecology and karyotypes, metaphase and polytene chromosomes of black gnats (Diptera, Ceratopogonidae).

Key words: ecology, karyotypes, polytene and metaphase chromosomes, black gnats, Ceratopogonidae.

Мокрецы, за исключением одного рода *Culicoides*, остаются недостаточно изученной группой двукрылых насекомых, входящих в комплекс кровососущих двукрылых. Кроме кровососов рода *Culicoides*, имеющих важное медицинское и ветеринарное значение, среди этого семейства двукрылых, насчитывающих более 6000 видов [18], имеются самые различные по характеру питания группы. Так, среди некровососущих видов мокрецов значительное число составляют опылители и нектарофаги. Их экологическое и кариологическое исследование в сравнительном аспекте с кровососами представляет теоретический и практический интерес.

До начала наших исследований по метафазным хромосомам мокрецов вышла лишь одна статья, в которой указывалось, что у *Nilobezzia brevicornis*, *Bezzia sp.*, *Probezzia (Bezzia) sp.* и *Culicoides* 2n = 6 [17]. Позднее были изучены хромосомы одного из видов кровососов — *Culicoides variipennis* [16, 21—23].

Первая специальная работа по политенным хромосомам мокреца *Forcipomyia nigra* была опубликована лишь в 2013 г. [26].

Наши исследования по кариологии мокрецов были начаты в середине 70-х гг. XX в., первые публикации по метафазным хромосомам и кариотипам вышли в 1982 и 1983 гг. [3, 4], а материалы о возможностях изучения политенных хромосом в 90-е гг. прошлого века [5—7].

К настоящему времени изучен кариотип 41 вида мокрецов из разных экологических групп семейства *Ceratopogonidae*. Методы изучения кариотипов опубликованы ранее [6, 7, 10, 11, 13—15]. Ниже дан обзор полученных данных по хромосомам, представлены материалы по 52 кариологически изученным видам, у которых исследовался сперматогенез и оогенез, а у части видов также и кариотипы (табл. 1). В процессе сборов в различных географических регионах (России, Казахстане, Узбекистане, Азербайджане, Армении и Грузии) нами проведено кариологическое изучение 52 видов из разных подсемейств мокрецов (табл. 1).

Кариологически было изучено 808 особей 41 вида 12 родов и более 1 тыс. временных и постоянных препаратов половых желез, изготовленных с помощью ацеторсеинового метода и метода суховоздушного подсушивания. В делящихся клетках исследовались метафазные пластинки.

Размеры метафазных хромосом изученных видов при сходной степени спирализации, использовавшейся для описания кариотипов, составляли от 1 до 10 мкм. Диплоидные числа в кариотипах и число хромосомных плеч были невелики и отличались у представителей разных экологических групп (табл. 2).

Из 27 видов некровососущих мокрецов у 23 видов все хромосомы были метацентрическими, у одного вида (*P. lineata*) из четырех пар хромосом три первые были метацентриками, а четвертая пара — субметацентриками, у трех видов (*Phaenobezzia rubiginosa*, *Forcipomyia sp. A* и *F. sp. B*) в кариотипах встречались акроцентрические хромосомы.

Среди 14 изученных кровососов *Culicoides* число хромосом (2n = 6) и хромосомных плеч (NF = 12) было сходным. По центромерному индексу у 13 видов этого рода все пары хромосом были метацентрическими и лишь у 1 вида (*C. stigma*) вторая пара хромосом была представлена субметацентриками.

Таблица 1

Изученные кариологически виды мокрецов

№ п/п	Вид	Исследованы		
		Оогенез	Сперматогенез	Кариотип
Некровососущие виды. Подсемейство Palpomyiinae, роды Sphaeromias, Probezzia, Mallochohelea, Palpomyia, Bezzia, Phaenobezzia				
1	S. pictus	+	+	+
2	S. candidatus*	+	–	+
3	S. fasciatus	+	+	+
4	Pr. seminigra	+	+	+
5	M. nitida	+	+	+
6	M. inermis	+	+	+
7	M. setigera	+	+	+
8	P. lineata	+	+	+
9	P. tibialis	+	+	+
10	P. miki	+	+	+
11	P. globulifera	+	+	+
12	P. reversa	+	+	+
13	B. nobilis	+	+	+
14	B. flavicornis	+	+	+
15	B. bicolor	+	+	+
16	B. annulipes	+	+	+
17	B. solstitians	+	+	+
18	B. fascispinosa	+	+	+
19	B. xantocephala	+	–	+
20	Ph. rubiginosa	+	–	+
Некровососущие виды. Подсемейство Ceratopogoninae, роды Stilobezzia и Alluaudomyia				
21	S. flavirostris	+	+	+
22	S. oxiana	–	+	+
23	A. pentaspila	+	+	+
24	A. splendida	–	+	–
Некровососущие виды. Подсемейство Dasyheleinae, род Dasyhelea				
25	D. abreui	+	–	+
26	D. flavoscutellata	+	–	–
27	D. sp. A	+	+	–
28	D. sp. B	–	+	–
29	D. sp. C	–	+	–

Окончание табл. 1

№ п/п	Вид	Исследованы		
		Оогенез	Сперматогенез	Кариотип
Некровососущие виды. Подсемейство Forcipomyiinae, роды Atrichopogon и Forcipomyia				
30	A. lucorum	+	–	–
31	A. sp.	+	–	+
32	F. bipunctata	+	–	–
33	F. pulchrithorax	+	–	–
34	F. ciliata	+	+	–
35	F. nigra	+	+	–
36	F. sp. A	+	–	+
37	F. sp. B	+	–	+
38	F. sp. C	+	–	–
Кровососущие виды. Подсемейство Ceratopogoninae, род Culicoides				
1	C. punctatus	–	+	+
2	C. fascipennis	–	+	+
3	C. pallidicornis	–	+	+
4	C. albicans	+	–	+
5	C. festivipennis	+	+	+
6	C. longipennis	–	+	+
7	C. salinarius	+	+	+
8	C. circumscriptus	+	–	+
9	C. desertorum	+	–	+
10	C. nubeculosus	+	+	+
11	C. riethi	+	–	+
12	C. algecirensis	+	–	+
13	C. stigma	+	+	+
14	C. parroti	+	–	+

* Вид рассматривается либо как самостоятельный [1, 19] либо как синоним *S. pictus* [18, 20], изучен нами по материалу из Грузии (Аджария, Потийский район), где находки его ранее не отмечались.

В ходе изучения кариотипов мы пытались обнаружить гигантские политенные хромосомы. Для этого были обследованы клетки слюнных желез, кишечника, мальпигиевых сосудов личиночных и имагинальных стадий. Во всех этих образованиях информативных политенных хромосом обнаружить не удалось. В то же время у ряда видов родов *Sphaeromias*, *Mallochohelea*, *Probezzia*, *Palpomyia* и *Bezzia* имелись хромомерные структуры в интерфазных ядрах, которые, по-видимому, могли быть отнесены к политенным хромосомам. Нами неоднократно предпринимались попытки развертывания и окрашивания (рутинного и дифференциального) с целью выявления и анализа предполагаемой дисковой структуры у мокрецов указанных родов. Однако из-за рыхлости и спутанности этих образований такие попытки не дали успешных результатов. Кроме того, у мокрецов родов *Alluaudomyia*, *Stilobezzia* и *Culicoides* в ядрах клеток на стадии интерфазы в слюнных железах, мальпигиевых сосудах и кишечнике имаго и личинок не обнаруживалось структур с достаточно высокой степенью политенизации, подобных первой группе родов [5].

Таблица 2

Экологические группы и кариотипы мокрецов

Экологическая группа	Число изученных видов	2 n, NF; распределение хромосом по центромерному индексу
Крупные хищники-энтомофаги родов Sphaeromias, Mallochohelea, Probezzia, Palpomyia и Bezzia	19	8, 16; M, M, M, M (у P. lineata 8, 16; M, M, M, SM,)
Крупные хищники-энтомофаги рода Phaenobezzia	1	6, 10; M, M, A
Мелкие хищники-энтомофаги Stilobezzia	2	8, 16; M, M, M, M
Мелкие хищники-энтомофаги Alluaudomyia	1	6, 12; M, M, M
Гематофаги Culicoides	14	6, 12; M, M, M (у C. stigma 6, 12; M, SM, M)
Нектарофаги Dasyhelea	1	8, 16; M, M, M, M
Паразиты насекомых Atrichopogon	1	6, 12; M, M, M
Нектарофаги Forcipomyia	2	6, 10; M, A, A

В ходе экологических исследований вителлогенеза и автогенности нами было проанализировано состояние фолликулов куколок и самок ряда видов некровососущих и кровососущих мокрецов [8, 9]. При выведении и последующем содержании в лаборатории самок мокрецов 10 родов *Sphaeromias*, *Mallochohelea*, *Probezzia*, *Palpomyia*, *Bezzia*, *Stilobezzia*, *Alluaudomyia*, *Culicoides*, *Dasyhelea* и *Forcipomyia* в ядрах питающих клеток в яичниках, находящихся на разных этапах вителлогенеза, обнаруживались хромосомы с разной степенью политенизации либо совершенно не имевшие неоднородной дисковой структуры, как, например, у *Culicoides*, либо имевшие такую неоднородность [6].

Политенизированные хромосомы мокрецов, полученные нами из ядер питающих клеток в яичниках, находящихся на разных этапах вителлогенеза, у более крупных по размерам тела (2,5—4,5 мм) хищников-энтомофагов *Sphaeromias*, *Mallochohelea*, *Probezzia*, *Palpomyia* и *Bezzia* были несколько крупнее, чем у более мелких (1,0—2,5 мм) хищников-энтомофагов *Stilobezzia* и *Alluaudomyia*, кровососов *Culicoides*, нектарофагов *Dasyhelea* и *Forcipomyia*.

На слабую политенизацию хромосом различных кариологически изученных родов мокрецов нами было обращено внимание и в дальнейшем [10, с. 8], при этом отмечалось, что в отличие, например, от мошек и многих комаров (хирономид, малярийных комаров, грибных комариков) у них нет гигантских политенных хромосом [11, с. 66]. Именно на эти две последние работы и ссылались авторы, описавшие недавно политенные хромосомы из железистых трихогенных клеток личинок *Forcipomyia nigra* [26]. Полученные ими данные по размерам политенных хромосом (50—200 μ) и отсутствию характерной для типичных гигантских политенных хромосом других двукрылых (хирономид, малярийных комаров, грибных комариков) дисковой структуры совпадают с нашими данными по политенным хромосомам, выделенным из питательных клеток яичников и слюнных желез личинок мокрецов, указанных выше.

В клетках слюнных желез личинок *Sphaeromias pictus* были найдены наиболее крупные и четкие политенные хромосомы, что могло быть связано с большими размерами ядер и размерами суммарной длины гаплоидного набора хромосом у мокрецов этого вида (и данного рода) по сравнению с остальными изученными [11, 15]. Кроме того, следует отметить, что данный род не встречался в хорошо изученном балтийском янтаре и в других, более древних янтарях Лавразии [24], т. е. имеет относительно недавнее происхождение по сравнению с другими изучавшимися таксонами.

Наши кариологические данные подтвердили обоснованные по морфологическим признакам различия подсемейств *Palpomyiinae* и *Ceratopogoninae* [2], сведенных позднее в одно подсемейство [18], выявили кариологическую обособленность *Phaenobezzia*, кариологическую апоморфию при формировании нектарофагии *Dasyhelea*, стабильность кариотипов в ряде родов некровососущих и кровососущих мокрецов. Исследования кариотипов мокрецов обнаружили сходные закономерности: низкую степень политенизации политенных хромосом и низкие хромосомные числа метафазных хромосом в различных по характеру питания группах мокрецов. Вместе с предшествующими данными об уменьшении размеров суммарной длины гаплоидного набора хромосом (TCL_n) метафазных хромосом в ранее возникших группах разной экологической специализации, установленными ранее [14, 15], это указывает на общий механизм поддержания размеров хромосом и размеров ядер клеток у мокрецов в ходе эволюции. С другой стороны, выявленный механизм, в отличие от других *Culicomorpha*, не препятствует формированию ветвей разных трофических специализаций в семействе *Ceratopogonidae*, которое отличается этим от близких семейств, в частности *Culicidae* или *Simuliidae*, в которых типичным является развитие только гематофагов. Полученные сведения представляют интерес для управления эволюционными механизмами формирования адаптаций и практики борьбы с мокрецами при эпидемических и эпизоотических ситуациях, а также использования энтомофагов и нектарофагов в агропромышленном комплексе.

Библиографический список

1. *Глухова В. М.* Личинки мокрецов подсемейств Palpomyiinae и Ceratopogoninae фауны СССР. Л., 1979. 225 с.

2. *Глухова В. М.* Кровососущие мокрецы родов Culicoides и Forcipomyia (Ceratopogonidae). Л., 1989. 408 с. (Фауна СССР. Н. С.; № 139 : Насекомые двукрылые. Т. 3, вып. 5).
3. *Исаев В. А.* Кариотипы трех видов мокрецов (Diptera, Ceratopogonidae) // Зоол. журн. 1982. Т. 61, № 6. С. 953—955.
4. *Исаев В. А.* Кариотипы шести видов мокрецов // Цитология. 1983. Т. 25. № 5. С. 620—623.
5. *Исаев В. А.* О взаимоотношениях родов Alluaudomyia, Culicoides, Stilobezzia (Diptera, Ceratopogonidae) / Иван. гос. мед. ин-т. Иваново, 1990. 17 с. Деп. в ВИНИТИ 11.05.90, № 2552.
6. *Исаев В. А.* Семейство мокрецов (Diptera, Ceratopogonidae) : сравнительный анализ кариотипов, морфологии, экологии и филогенетических отношений : дис. ... д-ра биол. наук. СПб., 1993. 537 с.
7. *Исаев В. А.* Семейство мокрецов (Diptera, Ceratopogonidae) : сравнительный анализ кариотипов, морфологии, экологии и филогенетических отношений : автореф. дис. ... д-ра биол. наук. СПб., 1993. 51 с.
8. *Исаев В. А.* Автогенность у кровососущих мокрецов рода Culicoides // Паразитология. 1993. № 4. С. 273—279.
9. *Исаев В. А.* Способность к автогенному развитию фолликулов у мокрецов энтомофагов и нектарофагов (Diptera, Ceratopogonidae) // Зоол. журн. 1993. Т. 72, № 10. С. 106—112.
10. *Исаев В. А.* Кариотипы мокрецов (Diptera, Ceratopogonidae). Иваново, 1998. 76 с.
11. *Исаев В. А.* Адаптации и эволюция (Diptera, Ceratopogonidae). Иваново, 1999. 184 с.
12. *Исаев В. А.* Кариотипы и эволюция кровососущих двукрылых насекомых // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2007. № 3. С. 3—12.
13. *Исаев В. А.* Кариотипы и эволюция кровососущих насекомых // Материалы Международной конференции по кариосистематике беспозвоночных животных «Karyo-V» 16—20 августа 2010 г. Новосибирск, 2010. С. 53.
14. *Исаев В. А.* Адаптации и биологическая эволюция (Diptera, Ceratopogonidae). Иваново, 2010. 296 с.
15. *Исаев В. А.* Кариотипы и филогения двукрылых // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2012. № 2. С. 5—14.
16. A First generation physical map of the Culicoides variipennis (Coquillett) (Diptera, Ceratopogonidae) genome / R. A. Nunamaker, S. E. Brown, L. E. McHolland, W. J. Tabachnick, D. L. Knudson // J. Med. Entomol. 1999. Vol. 36, № 6. P. 771—775.
17. *Atchley W. R., Jackson K. S.* Techniques and preliminary studies on the chromosomes of Nilobezzia and Bezzia // Ann. Entomol. Soc. Amer. 1968. Vol. 61. P. 1524—1527.
18. *Borkent A.* World species of biting midges (Diptera, Ceratopogonidae). Printed online (last updated: February 28, 2012).
19. *Borkent A., Wirth W. W.* World species of biting midges (Diptera, Ceratopogonidae) // Bull. Amer. Mus. Nat. Hist. N. Y., 1997. Vol. 233. 257 p.
20. First description of polytene chromosomes in biting midges (Diptera, Ceratopogonidae) A. Urbanek , R. Szadziewski, W. Giłka, A. Borkent // J. Med. Entomol. 2013. Vol. 50, № 2. P. 458—461.
21. *Hagan D. V., Hartberg W. K.* Preliminary observations on the mitotic chromosomes of Culicoides variipennis (Diptera, Ceratopogonidae) // J. Med. Entomol. 1986. Vol. 23, № 3. P. 334—335.
22. *Nunamaker R. A., Brown S. E., Knudson D. L.* Metaphase Chromosomes of Culicoides variipennis (Diptera, Ceratopogonidae) // J. Med. Entomol. 1996. Vol. 33, № 5. P. 871—873.
23. *Nunamaker R. A., Brown S. E., Knudson D. L.* Fluorescence in situ hibridization landmarks for chromosomes of Culicoides variipennis (Coquillett) (Diptera, Ceratopogonidae) // J. Med. Entomol. 1999. Vol. 36, № 2. P. 171—175.

24. *Szadziewski R.* Biting midges (Diptera, Ceratopogonidae) from Baltic amber // Bull. Entom. Pol. 1988. Vol. 57. P. 3—283.
25. *Szadziewski R.* The first fossil species in the predaceous midge tribe Sphaeromiini (Diptera, Ceratopogonidae) // Pol. Pismo Entomol. 2005. Vol. 74. P. 363—368.
26. *Szadziewski R, Gwizdalska-Kentzer M., Sontag E.* Predatory biting midges of the genus Sphaeromias (Diptera, Ceratopogonidae) in Europe // Pol. Pismo Entomol. 2007. Vol. 76. P. 293—302.

УДК 582.28

Л. Ю. Минеева, О. Е. Скворцова

ГОЛЛАНДСКАЯ БОЛЕЗНЬ ВЯЗОВ В БОТАНИЧЕСКОМ САДУ ИвГУ

В 2013 г. на территории ботанического сада ИвГУ обнаружено несколько экземпляров *Ulmus laevis* Pall с признаками поражения голландской болезнью ильмовых, вызванной патогенным грибом *Ophiostoma ulmi* (Buisman) Nannfeld.

Ключевые слова: голландская болезнь вязов, офиостомоз, вяз гладкий, сосудистый микоз, острая и хроническая формы.

Some instances of *Ulmus laevis* Pall with the signs of Dutch elm disease, caused by a pathogenic fungus Ophiostoma ulmi (Buisman) Nannfeld were indicated in 2013 in the territory of the Botanic garden of Ivanovo State University.

Key words: Dutch elm disease, ophiostoma, *Ulmus laevis* Pall, vascular mycosis, acute and chronic forms.

Зеленые насаждения — неотъемлемая часть градостроительной структуры любого города, в частности г. Иванова, и важнейшая часть его экологического каркаса как средообразующий и средозащитный фактор, обеспечивающий комфорт и качество среды обитания человека, и как обязательный и важный элемент городского ландшафта. Озеленительные посадки в городе, помимо выполнения декоративной функции, выступают как индикатор состояния городской окружающей среды, характеризующий ее качество и соответствие условиям жизнеобеспечения города. Поэтому мониторинг фитосанитарного состояния зеленых насаждений города важен для своевременного выявления и предотвращения болезней или гибели растений, и, как следствие, сохранения биоразнообразия скверов, парков и городских улиц.

Вяз гладкий (*Ulmus laevis* Pall) является одной из распространенных широколиственных пород деревьев, используемых в городском озеленении [7]. Они могут достигать 25 метров в высоту, относительно быстро растут в молодом возрасте, имеют плотную эллиптическую крону, которую можно формировать при помощи стрижки. Вязы используют в одиночных и групповых посадках как в садах и парках, так и в уличном озеленении, в том числе на основных магистралях с высокой автотранспортной нагрузкой, поскольку они характеризуются высокой газо- и солеустойчивостью, теневыносливостью, морозостойкостью, нетребовательны к почвенным условиям [1, 2] и при благоприятных факторах произрастания долговечны, доживают до 300 лет. Основной причиной, ограничивающей возможность использования вязов для озеленения, стало появление и распространение в городских посадках офиостомоза ильмовых (голландской болезни), вызывающего массовое усыхание деревьев независимо от возраста.

Голландская болезнь вяза впервые появилась в 1917—1919 гг. в Голландии, а 1929 г. распространилась по Европе, достигнув в 1936 г. западных районов нашей страны. К офиостомозу восприимчивы многие ильмовые — американский вяз, берест, обыкновенный вяз и др. Полностью иммунные к этой болезни виды вязов не найдены, некоторые из них относительно устойчивы к ней, как, например, перистоветвистый вяз [4].

Возбудитель — гриб *Ophiostoma ulmi* (Buisman) Nannfeld — относится к классу *Ascomycetes*, подклассу *Euascomycetidae*, группе порядков плектомицеты, порядку *Microascales*, семейству *Ophiostomaceae*, роду *Ophiostoma* [4]. По другим литературным источникам, систематическое положение гриба следующее: отдел *Ascomycota*, класс *Pyrenomycetes*, порядок *Microascales*, семейство *Ophiostomaceae*, род *Ceratocystis* [7]. По третьим источникам, возбудитель голландской болезни вязов — гриб *Graphium ulmi* Schwarz, синоним которого *Ceratocystis ulmi* Buisman, а *Ophiostoma ulmi* (Buisman) Nannfeld является их телеоформой [2].

Заражению деревьев сопутствуют периодически повторяющиеся неблагоприятные погодные условия (заморозки, оттепели, ураганные ветры); нарушение гидрологического режима; перестойный возраст насаждений; высокая рекреационная нагрузка в любое время года; механические повреждения деревьев. Перечисленные непатогенные факторы создают благоприятные условия для размножения насекомых и развития болезней [2]. Одним из основных способов распространения инфекции является вредоносная жизнедеятельность жуков-короедов — ильмовых заболонников. Главными переносчиками инфекции являются три вида заболонников: большой ильмовый заболонник (*Scolytus scolytus*), струйчатый заболонник (*Scolytus multistriatus*) и заболонник пигмей (*Scolytus pigmeaus*). В конце апреля — начале мая под отставшей корой больных деревьев в массе развивается конидиальное спороношение гриба — черные коремии типа графиум. Их можно найти в ходах жуков-короедов и на порубочных остатках, которые также служат одним из источников инфекции. Образование конидиального спороношения совпадает с весенним летом и дополнительным питанием ильмовых заболонников. Жуки заносят споры гриба в свои ходы, вызывая заражение дерева. Некоторые другие насекомые, такие как ильмовый листоед, ильмовый слоник, также могут участвовать в распространении инфекции. Подсохшие споры гриба могут разноситься токами воздуха и, попадая на свежие механические повреждения деревьев, вызывать их заражение. Конидии гриба в древесине сохраняют жизнеспособность более года. Перитеции с аскоспорами образуются также в трещинах коры и древесины, в ходах жуков-короедов, но они менее обильны, чем конидиальное спороношение. Конидии и аскоспоры гриба погружены в слизь, что облегчает перенос их насекомыми. После заражения дерева, уже через 20—24 часа, наблюдается размножение гриба в сосудах ксилемы. Образуется масса микроконидий типа бластоспор, очень мелких, разносящихся по сосудам дерева с восходящими токами. За час они переносятся на расстояние до 15 метров, скорость их перемещения определяется интенсивностью сокодвижения. Гифы гриба через поры проникают из сосуда в сосуд. Они распространяются также в сердцевинных лучах и паренхиме дерева. В пораженных клетках образуется темная камедеподобная масса, выделяющаяся в сосуды ксилемы. Причинами увядания дерева считают механическое закупоривание сосудов ветвей и ствола камедью, спорами и гифами гриба, продуктами гидролиза клеточных стенок хозяина и образование грибом токсинов [4]. Без предварительного ослабления дерева поражаются все надземные органы: стволы, ветви и листья. Болезнь вызывает массовое усыхание насаждений всех возрастов и относится к типу сосудистых микозов.

Свои наблюдения мы проводили на территории ботанического сада ИвГУ, отслеживая состояние *Ulmus laevis* Pall, на кроне которого были обнаружены симптомы голландской болезни вязов, вызываемой вредоносным грибом офиостома вязовая (*Ophiostoma ulmi* (Buisman) Nannfeld).

Впервые признаки поражения вязов *Ophiostoma ulmi* (Buisman) Nannfeld замечены в период весенне-летнего сезона 2013 г. Изучив работы по наблюдению за фитопатологическим состоянием растений ботанического сада ИвГУ за предыдущие годы, выяснили, что ранее вспышки голландской болезни вязов не отмечались. Однако проявления данной инфекции были уже зарегистрированы на территории г. Иванова. Так, в 2012 г. от *O. ulmi* (Buisman) Nannfeld пострадал городской сквер им. Я. Гарелина. В результате острого течения заболевания за один сезон погибло несколько экземпляров взрослых деревьев. В 2013 г. на ул. Тимирязева погибли от голландской болезни и были удалены 16 вязов. Также группа больных деревьев была санкционированно вырублена в городском парке культуры и отдыха им. Степанова. Известны и другие случаи гибели от офиостомоза единичных и, как правило, старовозрастных экземпляров вяза гладкого в разных районах Иванова.

На территории ботанического сада ИвГУ, исключая дендрарий, по периметру участка насчитывается 19 экземпляров *Ulmus laevis* Pall, 13 из которых являются старовозрастными деревьями. Симптомы офиостомоза обнаружены на 6 экземплярах деревьев, из которых 4 старовозрастные, представляющие особую декоративную и историческую ценность для ботанического сада. Можно отметить, что из двух форм течения офиостомоза (острой и хронической) вязы ботанического сада страдают хронической формой, о чем свидетельствует внезапное частичное пожелтение и увядание листьев на отдельно взятых ветвях — синдром «желтого флага», не приведшее к полной гибели дерева. Данный синдром является одним из основных внешних симптомов, свидетельствующим о поражении офиостомозом. Усыхание начинается с боковых ветвей верхней части кроны, затем распространяется по всей кроне по стволу вниз. На срезах пораженных ветвей хорошо заметно потемнение проводящих сосудов на последних годичных кольцах в виде прерывистой или сплошной линии. При остром течении офиостомоза дерево усыхает в течение вегетационного сезона, а иногда за несколько дней [4].

Встает вопрос о защите растений от офиостомоза и разработке мер по предупреждению вспышек заболевания в насаждениях вязов. В городских условиях период от появления первых больных деревьев до массового поражения занимает 3—4 года. Важное значение в это время имеет оперативное выявление очагов и отдельных зараженных деревьев; обработка стволов и ветвей заселенных жуками и зимующими личинками деревьев контактными инсектицидами [3]; использование ловушек; своевременная вырубка больных и свежезаселенных деревьев; уничтожение порубочных остатков. Научно обоснованные сроки вырубки больных деревьев — это поражение 1/3 части кроны, когда патоген еще не успевает проникнуть в корневую систему растения. Многообещающим направлением считается выведение гибридов вяза, устойчивых к возбудителю заболевания. Однако сколько-нибудь существенных успехов в этом направлении пока не зарегистрировано. Появившиеся в питомниках Германии резистентные формы вяза чрезвычайно дороги и недоступны для массового использования при озеленении городских территорий. С целью предотвращения распространения гриба через корневую систему рекомендована круговая подрубка ствола и окапывание больного дерева траншеей глубиной не менее 45 см. Рекомендованы осенние (в повышенной концентрации) и весенние обработки кроны вязов метоксихлоратами или хлорперифосом (дурсбан) для борьбы с дополнительно питающимися жуками. Также имеется ряд пестицидов и агрохимикатов, рекомендованных для борьбы с зимующими личинками всех видов вязовых заболонников и других вредителей зеленых насаждений, таких как цимбуш (циперметрин), шерпа, циткор, ципи и др., для инъекций под кору с расходом 3 мл/м2 поверхности. Необходимо поддерживать уже имеющиеся насаждения в удовлетворительном состоянии, т. к. ослабление деревьев способствует развитию заболевания. Для этого следует проводить весь комплекс мероприятий ухода: минеральные подкормки, рыхление поверхностного слоя почвы, поливы и дождевание в засушливые сезоны, своевременную вырезку сухих ветвей. Недопустимо наличие в посадках сухостоя как субстрата для размножения заболонников.

Известен способ защиты вязов от офиостомоза путем инъекции в больное дерево живых культур бактерий антагонистов *Pseudomonas syringae*, *Bacillus subtilis* [5]. При этом бактерии обнаруживаются в дереве и через год после инокуляции, предотвращая развитие гриба. Практически борьба с голландской болезнью заключена в подавлении двух популяций: возбудителя и переносчика, которые очень тесно связаны между собой.

Для того чтобы остановить распространение голландской болезни вязов как на территории ботанического сада, так и в городских насаждениях, понадобится осуществить ряд профилактических мер, а именно:

- в новом весенне-летнем сезоне провести полную инвентаризацию ильмовых на территории ботанического сада и дендрария;
- выявить деревья с симптомами офиостомоза, с признаками механического поражения жуками-вредителями различных групп, старых и ослабленных растений и вести за ними особое наблюдение;
- разработать и применить комплекс мер по предупреждению голландской болезни вязов;
- провести максимально возможные мероприятия по утилизации уже имеющихся пораженных частей растений для предупреждения дальнейшего распространения офиостомоза по территории ботанического сада.

Все эти действия необходимо реализовать в комплексе с мониторингом голландской болезни вязов в масштабе региона.

Библиографический список

1. *Дорофеева Т. Б.* Графиоз на вязах // Защита и карантин растений. 2003. № 1. С. 34—35.

2. *Дорофеева Т. Б.* Эпифитотия офиостомоза в насаждениях вязов Санкт-Петербурга // Вестник защиты растений. 2007. № 4. С. 41.
3. Древесные растения в природе и культуре : сб. ст. АН СССР. М. : Наука, 1996. 211 с.
4. Мир растений : в 7 т. / под ред. М. В. Горленко. М. : Просвещение, 1991. Т. 2 : Грибы. 475 с.
5. *Мозолевская Е. Г.* Особенности защиты зеленых насаждений города // Технология защиты леса. М. : Экология, 1991. С. 287—289.
6. *Мозолевская Е. Г., Белова Н. К., Крылова Н. В., Осипов И. Н.* Экология заболонников — переносчиков голландской болезни // Защита растений. 1987. № 7. С. 37—40.
7. *Черепанова Н. П.* Систематика грибов : учеб. пособие. СПб. : Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2005. 344 с.

УДК 598.243.1(470.315)

В. Н. Мельников, Д. Е. Чудненко, В. В. Гриднева, А. А. Калинин, С. В. Буслаев

ОБЗОР КУЛИКОВ ИВАНОВСКОЙ ОБЛАСТИ

В форме видовых очерков представлены данные по характеру распределения и численности куликов на территории Ивановской области. В регионе выявлено 30 видов куликов. Из них 17 видов гнездятся на территории Ивановской области, 11 были замечены только на пролете, для 2 видов отмечены редкие случайные залеты.

Ключевые слова: кулики, ржанкообразные, авифауна, редкие виды, Красная книга.

The article provides the data about sandpipers geographical distribution and population in the Ivanovo region. 30 species of sandpipers had been found in the region. 17 of them nest in the Ivanovo region, 11 had been noticed flying through, 2 species had been noticed occasionally.

Key words: sandpipers, Charadriiformes, avifauna, rare species, Red Book.

Кулики были в центре внимания исследователей с начала орнитологических исследований в регионе. М. В. Бубнов в 1930—1950-е гг. провел не только комплексные изучения авифауны Приволжского района [2], но и специальные наблюдения куликов [1]. Накопленный к концу XX в. массив данных вошел в сводку «Птицы Ивановской области» [4]. Обзор состояния редких видов куликов в Ивановской области был представлен 10 лет назад [6]. В последнее время нами был проведен ряд исследований фауны и населения куликов в разных районах Ивановской области, специальные учеты бекасов, веретенников и кроншнепов, проведены мониторинговые учеты на постоянных площадках, проводится изучение особенностей распространения и экологии вальдшнепа, издана Красная книга Ивановской области (Иваново, 2007). На основе ранее опубликованных исследований и оригинальных материалов был подготовлен данный обзор куликов региона.

Золотистая ржанка (*Pluvialis apricarius*). Редкий пролетный вид. Отмечался во время весеннего и, чаще, осеннего пролета — с июля по сентябрь (см.: [2, 6, 4], а также наши данные). Регистрируются стаи от нескольких до 50 особей.

Галстучник (*Charadrius hiaticula*). Очень редкий пролетный вид. Изредка отмечался на осеннем пролете как в прошлом [2], так и в настоящее время. В конце лета галстучников мы отмечали на охладительных прудах ТЭЦ-3, на побережье Горьковского водохранилища.

Малый зуек (*Charadrius dubius*). Занесен в Красную книгу Ивановской области с категорией 3 как вид, имеющий низкую численность и спорадическое распространение на значительных территориях. Встречается широко на территории области, но поселяется лишь на песчаных пляжах рек и их антропогенных аналогах — песчаных и гравийных техногенных насыпях, грунтовых карьерах, торфяных полях, обычно по берегам р. Клязьмы и низовий Клязьминских притоков, на отмелых участках побережья Горьковского водохранилища [10]. В Клязьминском заказнике обычно встречается по песчаным косам вдоль р. Клязьмы (3,2 пары/км^2), редко по берегам озер (0,15 пар/км^2) [12]. До создания Горьковского водохранилища малый зуек в значительном количестве гнездился по песчано-гравийным отмелям берегов р. Волги, после поднятия воды исчез из большинства мест [2]. В первые годы после затопления водохранилища продолжал оставаться одним из самых обычных видов куликов в районе Немдского и Унженского отрогов [3]. В настоящее время на побережьях рек и Горьковского водохранилища его численность низка: 0,08—1,33 пар/10 км русла [10]. Активно заселяет выработанные грунтовые (чаще — песчаные) карьеры на ранних этапах зарастания. Гнездование малого зуйка в последние годы регулярно отмечается на песчаных карьерах асфальтового завода в окрестностях оз. Рубское, на большом комплексе Хромцовских карьеров в Фурмановском районе. Единичные пары малого зуйка спорадически гнездятся на торфоразработках, поселяясь на торфяных полях на начальных этапах зарастания.

Хрустан (*Eudromias morinellus*). Очень редкий пролетный вид. Изредка отмечался на осеннем пролете до середины XX в. [2, 4].

Чибис (*Vanellus vanellus*). Обычный гнездящийся вид. Населяет различные типы открытых пространств — возделываемые и заброшенные сельхозугодья, разные типы лугов, пастбища, верховые болота, торфоразработки, гари, пустыри. Поселяется колониями от нескольких до нескольких десятков пар. Плотность гнездования на торфяных полях достигает 1—2 пар/10 га. На карьерах гнездится с гораздо меньшей плотностью (0,5—1 пар/км^2), предпочитая заболоченные, закрытые сплавиной водоемы.

На территории Клязьминского заказника чибис довольно редок. В северной, сельскохозяйственной части плотность населения составляет 0,4 пар/км^2, в пойме Клязьмы — 1,2 пар/км^2 [10].

Ходулочник (*Himantopus himantopus*). Известны единичные залеты. Одиночный молодой ходулочник отмечен 9 мая 2010 г. в Привожском районе на заброшенном залитом вешними водами поле в стае турухтанов.

Кулик-сорока (*Haematopus ostralegus*). Занесен в Красную книгу Ивановской области с категорией 3 как редкий вид, имеющий локальное распространение. В Ивановской области гнездится на побережье и на островах

Горьковского водохранилища и его отрогов (устья р. Унжи, Немды, Меры), а также по берегам р. Клязьмы и Тезы. До 50-х гг. регулярно гнездился по берегам р. Волги, после образования Горьковского водохранилища (50—70-е гг.) стал здесь исчезать [2, 4], с 90-х гг. XX в. численность кулика-сороки по берегам р. Волги несколько возросла. В приустьевом расширении р. Немды гнездятся до 15 пар, на р. Клязьме в пределах Ивановской области до 10 пар. Плотность населения на р. Клязьме составляет 1,33 пар/10 км русла, а на побережье Горьковского водохранилища — 1,42 пар/10 км береговой линии [10].

До конца 50-х гг. кулик-сорока обычно встречался в Приволжском районе, причем гнездился здесь нехарактерным образом — на сельхозугодьях, удаленных от водоемов [2]. Гнездование кулика-сороки в том же районе на сельхозугодьях наблюдал Г. М. Сальников в начале 90-х [4], отмечается оно и в настоящее время. В 2007 и 2009 гг. наблюдалось гнездование кулика-сороки на невысоком железобетонном сооружении среди сельхозугодий в районе г. Плёса. В 2010 г. кулик-сорока гнездился на очистных сооружениях г. Привожска. Впервые пара была там отмечена 13 апреля 2010 г., 11 мая 2010 г. В кладке было 3 яйца.

На территории Ивановской области мы предполагаем гнездование в общей сложности 30—50 пар. Самая поздняя встреча — 19 сентября 2010 г. Стайка из 20—25 особей была отмечена в Приволжском районе.

Камнешарка (*Arenaria interpres*). Залетный вид. Известна единственная регистрация на территории области. М. А. Бубнов наблюдал старую и молодую особь на берегу р. Волги 6 июня 1952 г. [2].

Чернозобик (*Calidris alpina*). Редкий пролетный вид. Регистрировался как на осеннем [2, 4], так и на весеннем пролете. Мы отмечали чернозобиков на очистных сооружениях г. Приволжска, охладительных водоемах ТЭЦ-3, побережье Уводьского водохранилища, Моркушском водохранилище.

Краснозобик (*Calidris ferruginea*). Очень редкий пролетный вид. Н. Н. Герасимов добыл двух краснозобиков на окраине г. Иванова на грунтовом карьере в сентябре 1953 г. [4]. В июле 2008 г. два краснозобика были отмечены на р. Нерль (М. А. Сафонова, личное сообщение, подтвержденное фотоснимками). В августе 2009 г. 3 краснозобика наблюдались в смешанной пролетной стае с чернозобиками и турухтанами на небольшой отмели посреди Моркушского водохранилища.

Кулик-воробей (*Calidris minutus*). Редкий пролетный вид. В 1930—1950-х гг. его регулярно отмечали на осеннем пролете на побережье р. Волги [2], на карьерах на окраине г. Иванова [4]. В настоящее время этот вид регистрируется значительно реже, отдельные особи и небольшие группы были отмечены на водоемах ТЭЦ-3, Уводьском водохранилище, побережье Горьковского водохранилища, в г. Вичуге на дамбе у д. Дача Тяжелова, по берегам небольших водоемов Родниковского района. В конце июля 2006 г. до 30 особей кулика-воробья отмечены в смешанной стае пролетных куликов, кормящихся на временном водопойном пруду в урочище Остров в Приволжском районе.

Белохвостый песочник (*Calidris temminckii*). Редкий пролетный вид. М. А. Бубнов [2] изредка встречал белохвостых песочников в августе на р. Волге. В настоящее время их можно видеть на побережье Горьковского водохранилища, на очистных сооружениях г. Приволжска. В конце мая

2002 г. одиночная птица была отмечена на силикатных карьерах в окрестностях г. Иванова.

Турухтан (*Philomachus pugnax*). Обычный пролетный, редкий гнездящийся вид. Весенняя миграция наблюдается в мае (с конца апреля по начало июня). Валовый пролет, как правило, идет в течение нескольких дней. М. А. Бубнов [1, 2] часто наблюдал выводки и находил гнезда турухтанов в Приволжском районе. Мы также неоднократно отмечали выводки турухтана на полях учхоза Ивановской сельскохозяйственной академии у Ивановского аэропорта, в пойме р. Лух, в Клязьминском заказнике и др. На осеннем пролете наблюдается до середины сентября.

Грязовик (*Limicola falcinellus*). Редкий пролетный вид. В 1930—1950-е гг. М. А. Бубнов [2] изредка наблюдал грязовиков во время миграций на р. Волге. В настоящее время этот вид не регистрировался.

Круглоносый плавунчик (*Phalaropus lobatus*). Редкий пролетный вид. М. А. Бубнов [2] дважды добывал плавунчиков в позднелетний и осенний периоды. Мы наблюдали небольшие группы плавунчиков на осеннем пролете на охладительных водоемах ТЭЦ-3, на лужах среди полей. В начале августа 2007 г. пара плавунчиков в осеннем наряде отмечены на торфокарьерах «Большое Болото». В весенний период известно лишь одно наблюдение: 13 особей было отмечено на лужах среди полей в Приволжском районе 26 мая 2008 г., 15 особей — 30 марта 2007 г.

Черныш (*Tringa ochropus*). Обычный гнездящийся вид. Населяет разные типы леса, выбирая для гнездования участки вблизи водоемов, хотя бы небольших. В середине апреля наблюдается активное токование чернышей. Гнезда с полными кладками отмечались с начала мая и были расположены в старых гнездах дроздов — певчего, рябинника, черного, дерябы. По результатам учетов Г. М. Сальникова, плотность населения в пойменных лесах составляет 0,4—1,46 пар/км^2, в смешанных лесах — до 0,66 пар/км^2, на торфяных полях и торфяных карьерах — 0,3—0,56 пар/км^2 [4]. В результате наших количественных учетов получены сравнимые данные. На территории Клязьминского заказника по берегам озер селится с плотностью населения 0,6 пар/км^2, по побережью Клязьмы — 3,6 пар/км^2 [12], на территории комплексов торфоразработок черныши гнездятся по заросшим древостоем берегам мелиоративных каналов с плотностью — 2 пары/км, вдоль узкоколеек — 0,7 пар/км. На торфокарьерах плотность населения вида составляет 0,2—0,8 пар/км^2.

Фифи (*Tringa glareola*). Обычный пролетный, немногочисленный гнездящийся вид. Активное токование фифи в течение длительного времени отмечалось на многих участках — на гарях и вырубах Балахнинской низины, в поймах рек Лух, Клязьма, Уводь, на увлажненных лугах и заброшенных сельхозугодьях. Беспокоящиеся птицы отмечались в начале лета на торфоразработках. Плотность предположительного гнездования фифи в этих местообитаниях составляет 0,2 пар/км^2 — на карьерах, 0,6—1,2 пар/10 га — на торфополях. Однако достоверных подтверждений гнездования вида на территории области нет.

Большой улит (*Tringa nebularia*). Занесен в Красную книгу Ивановской области с категорией 3 как редкий вид, имеющий локальное распространение. В Ивановской области отмечен в поймах средних рек (Лух, Уводь, Нерль, Вязьма), по берегам Горьковского водохранилища и его отрогов, Уводьского водохранилища. По берегам рек с развитой поймой (Клязьма, Лух) и по берегам приустьевых расширений Горьковского водохранилища плотность населения составляет 0,11 пар/км береговой линии [10]. Регулярно гнездится на зарастающих торфоразработках (Демидово, Большое Болото, Сахтыш — Рубское) [13]. Плотность гнездования большого улита на торфокарьерах составляет 0,9—1,8 пар/км^2; на торфополях — 0,6—1,2 пар/10 га. В Клязьминском заказнике в полосе сосновых лесов — 0,07, а в пойме Клязьмы — 1,2 пар/км^2 [14]. В Балахнинской низине большой улит является обычным видом и гнездится с плотностью 0,38 пар/км^2 [5]. Улиты здесь поселяются в основном по лесным гарям и окраинам верховых болот. Всего на обследованной территории выявлено 30 территориальных пар. После пожаров 2010 г., когда огнем была пройдена большая часть территории, численность значительно сократилась, выявлено 12 занятых гнездовых территорий.

Поручейник (*Tringa stagnatilis*). Занесен в Красную книгу Ивановской области с категорей 2 как вид, сокращающий численность. Северную границу ареала проводят несколько южнее Ивановской области. В Ивановской области ранее считался залетным видом [4]. Беспокоящиеся пары отмечали в пойме Тезы [6], на торфяных полях у д. Русино. В последние годы отмечается гнездование на заброшенных сельхозугодьях у д. Дегтярево в окрестностях г. Иванова, у с. Васильевского Шуйского района. Выводки регистрировались в Клязьминском заказнике [14]. В гнездовой период вид наблюдался по берегам рек (Уводь, Нерль, Лух), на побережье Горьковского водохранилища и его притоков (Мера, Желвата). Очень редок, в известных местообитаниях гнездятся единичные пары. По берегам рек плотность населения составляет 0,05—0,25 пар/10 км русла [10]. В 2004 г. на торфополе комплекса «Сахтыш — Рубское» был отмечен плохо летающий выводок поручейников. В июле 2008 г. не менее 2 плохо летающих выводков наблюдалось на пруду около д. Ногино Приволжского района и 1 хорошо летный выводок неподалеку на влажной луговине по левому берегу местной запруды. В 2013 г. значительно возросла численность гнездования поручейника на торфополях комплекса «Большое Болото»: токующие пары широко отмечались на полях, что, возможно, связано с изменением структуры растительности в результате пожаров 2010 г.

Травник (*Tringa totanus*). Занесен в Красную книгу Ивановской области с категорией 3 как вид, имеющий низкую численность и спорадическое распространение на значительных территориях. В Ивановской области отмечен в поймах средних рек (Лух, Уводь, Теза, Клязьма, Нерль, Вязьма), на побережье озерной части Горьковского водохранилища, на торфоразработках, в последние годы травники регистрируются на переувлажненных участках заброшенных сельхозугодий на ранних этапах зарастания.

В большинстве выявленных мест обитания отмечаются единичные пары. В пойме среднего течения р. Лух учтено 10—20 пар, на полях учхоза ИГСХА гнездятся ежегодно, достигая численности 5—7 пар [6]. В последние годы здесь наблюдается гнездование 2—3 пар травников. По берегам рек с развитой поймой (Клязьма, Лух, Уводь) плотность населения составила 0,05—0,5 пар/10 км русла. На илистых отмелях озерной части Горьковского водохранилища встречается чаще — 3,33 пар/10 км береговой линии [10]. На торфополях травники могут гнездится с плотностью до 2 пар/10 га, на карьерах — до 0,8 пар/1 км^2, предпочитая, как и другие кулики, вторично заболачивающиеся участки.

Щеголь (*Tringa erithropus*). Редкий пролетный вид. В период осенних миграций отмечался в Приволжском районе ([2], а также наши данные), на окраине г. Иванова [4], в Фурмановском районе на пруду у с. Меленки.

Перевозчик (*Actitis hypoleucos*). Обычный гнездящийся вид. Населяет берега разных водоемов. По учетам Г. М. Сальникова, в пойме р. Лух плотность населения составляет 5,3 пар/км^2, на р. Клязьме — 1,5 особи на 1 км русла, на зарастающих полях и карьерах — 0,1—0,3 пар/км^2 [4]. В ходе специальных учетов на разных типах торфоразработок показано, что перевозчик поселяется на торфокарьерах с низкой степенью зарастания, достигая плотности гнездования 0,9 пар/км^2. С последующим заболачиванием карьерного комплекса вид перестает там гнездиться. В Клязьминском заказнике гнездится по берегам пойменных озер с плотностью 1,63 пар/км^2, по берегам р. Клязьмы — 6,84 пар/км^2. На лесном правобережье русловой части Горьковского водохранилища — от 0,6 до 1,7 пар/км береговой линии. Появления на гнездовых территориях — 18—28 апреля, вылупление птенцов — 1—16 июня; поднятие выводка на крыло — 27 июня — 2 июля.

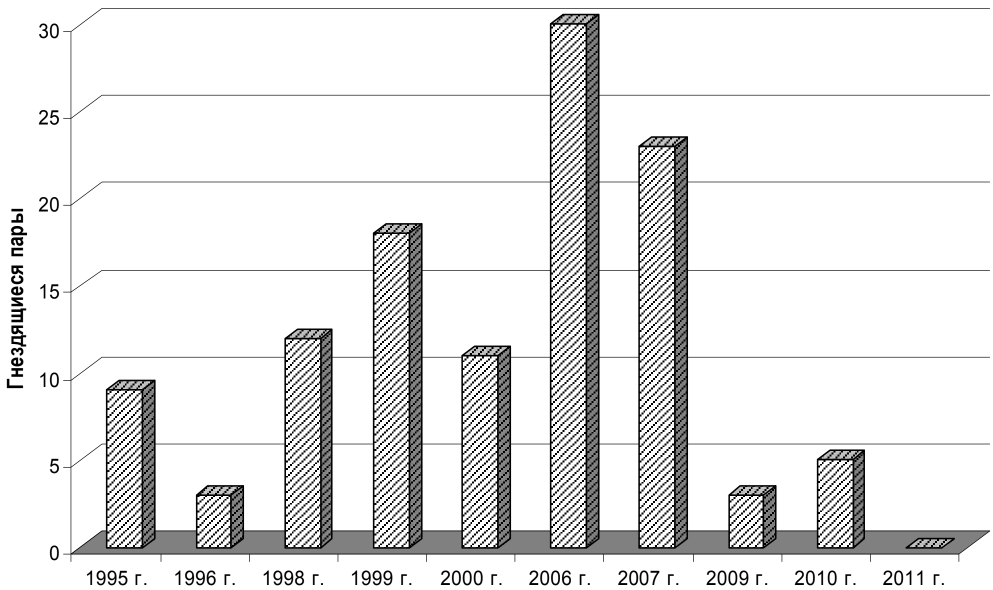
Мородунка (*Xenus cinereus*). Редкий гнездящийся вид. На территории региона распределена очень неравномерно, гнездится по берегам и на островах Горьковского водохранилища и его отрогов, на побережьях рек (Клязьма, Лух, Уводь, Нерль, Теза, Вязьма), на торфяных полях у д. Русино, на торфоразработках (Демидово, Большое Болото). Более обычна на побережьях и островах Горьковского водохранилища и его отрогов. До образования водохранилища статус вида в регионе не ясен. Уже на 3—4 год после образования Горьковского водохранилища мородунка стала здесь одним из самых многочисленных куликов, гнездилась на островах, плывунах и на побережьях [4]. В 1959 г. плотность населения мородунки на берегах водохранилища составила 0,9 пар/км^2 [3]. В настоящее время численность мородунки на Горьковском водохранилище значительно снизилась: гнездится 0,5—1 пар/10 км береговой линии [10]. В 1975 г. на Клязьме мородунка гнездилась с плотностью 0,4 пар/10 км русла [4], к настоящему времени численность возросла — 1,33 пар/10 км русла [10]. На других реках плотность населения составляет 0,15—0,5 пар/10 км русла [10]. На торфяных карьерах отмечена плотность населения 0,2—0,5 пар/км^2, на торфополях — 0,7 пар/10 га.

Большой кроншнеп (*Numenius arquata*). Занесен в Красную книгу Ивановской области с категорией 3 как вид, имеющий низкую численность и спорадическое распространение на значительных территориях. В Ивановской области отмечено гнездование на низинных болотах в Приволжском районе [2], на сельхозугодьях во многих районах области — на полях учхоза ИГСХА, на территории Юрьева (Владимирского) ополья, на полях Ильинского, Приволжского, Фурмановского, Вичугского, Лухского районов, в Балахнинской низине. При этом большой кроншнеп заселяет как заброшенные сельхозугодья на ранних этапах зарастания, так и возделываемые участки, отдавая предпочтение полям сеяных трав, клевера и избегая посевов зерновых. На территории торфоразработок кроншнеп предпочитает гнездиться на торфяных карьерах с высокой степенью вторичного заболачивания. Плотность вида в таких местообитаниях составляет 0,5—1,8 пар/км^2. Общая численность большого кроншнепа на территории Ивановской области оценена в 150—200 гнездящихся пар [6].

Средний кроншнеп (*Numenius phaeopus*). Занесен в Красную книгу Ивановской области с категорией 4 как редкий слабоизученный вид. По территории Ивановской области проводят южную границу ареала. В Ивановской области изредка отмечается на пролете [2, 4]. Среднего кроншнепа в гнездовой период неоднократно в разные годы регистрировали (визуально и по голосу) в Балахнинской низине — на верховых болотах и заброшенных торфоразработках.

Большой веретенник (*Limosa limosa*). На территории Ивановской области известны небольшие колонии этого вида, их общая численность на территории области оценивается в 500—700 гнездящихся пар [6, 14]. Тенденция снижения численности наблюдается на всем ареале вида и особенно выражена в его европейской части. Территория Ивановской области остается одной из немногих в Европейском центре России, где сохраняются относительно стабильные поселения веретенника. В 2007 г. в рамках международного российско-голандского проекта были проведены мониторинговые учеты численности вида на ключевых местообитаниях большого веретенника в Нечерноземном центре, в том числе и в нашем регионе [7]. Они показали заметное снижение численности вида на основных колониях. Наметившийся подъем численности вида за счет заселения влажных участков заброшенных сельхозугодий, как и предполагалось, стал временным явлением. Впоследствии, в ходе демутационной сукцессии, происходит зарастание этих участков высоким бурьяном, а позднее древесной порослью и кустарником [11], и большинство участков, выведенных из хозяйственного оборота сельхозугодий, становятся непригодными для обитания веретенника.

Оказывают негативное влияние на численность вида и локальные изменения. В 2010 г. в окрестностях пос. Дегтярево Ивановского района, на участке, где известно наиболее крупное поселение большого веретенника на территории Ивановской области, насчитывавшего в последние годы от 15 до 30 гнездящихся пар (см. рис.), было построено предприятие, подъездные пути к нему и подведены коммуникации, в результате чего данное поселение веретенника исчезло. В 2011 г. здесь в ходе специальных учетов не было выявлено ни одной гнездовой территории веретенника.



Динамика численности большого веретенника на дегтяревских полях

Во время весенних палов, когда на значительных площадях заброшенных сельхозугодий производится выжигание усохшей травянистой растительности, наблюдается массовая гибель кладок, и такие территории не используются большим веретенником для повторного гнездования. После пожаров 2010 г. сократилась численность большого веретенника на территории Балахнинской низины (юг Южского района). Снижение численности этого вида отмечено в пойме р. Лух и на других поселениях веретенника.

Учитывая общую негативную тенденцию динамики численности вида, выявленную в ходе наших мониторинговых исследований, т. е. снижение численности и сокращение количества поселений большого веретенника на территории Ивановской области, а также ключевое значение региона для сохранения вида в Европейском центре России, предлагаем внести большого веретенника в Красную книгу Ивановской области с категорией 2 как вид, сокращающий численность [8]. На торфяных карьерах этот вид гнездится спорадически, с плотностью 0,2 пар/1 км^2.

Вальдшнеп (*Scolopax rusticola*). Обычный гнездящийся вид. Населяет леса разных типов, предпочитая лесные массивы, разреженные вырубками, полянами, болотцами, лесными дорогами и т. п. Весной первые вальдшнепы появляются в конце марта — начале апреля. За 15 лет наблюдений (1999—2015 гг.) в ходе Всероссийского учета вальдшнепа, среднее число контактов за 2 ч наблюдения составляло $7{,}42 \pm 0{,}24$, в отдельные годы — от 4,9 до 9 контактов за 2 ч наблюдения. Среднее число контактов при учетах на малых (12×12 км) квадратах, проведенных в Пучежском районе в 2000—2008 гг., было выше (см. табл.).

Результаты учета вальдшнепа на малых (12 × 12 км) квадратах в Пучежском районе Ивановской области в 2000—2008 гг.

Год	Точки учета	Точки без тяги	Максимальное число контактов	Общее число контактов	Среднее число контактов
2000	7	0	27	81	11,5
2001	7	0	48	147	21,0
2002	8	1	19	55	6,8
2003	6	0	21	74	12,3
2004	6	0	21	70	11,7
2005	7	1	28	137	19,6
2006	6	0	29	107	17,8
2007	4	0	37	115	28,8
2008	6	0	30	134	22,3

***Бекас* (*Gallinago gallinago*).** Обычный, широко распространенный вид. Заселяет все подходящие биотопы. В Клязьминском республиканском заказнике плотность населения бекаса невысока и сильно зависит от высоты и продолжительности весеннего паводка — от 0,4 до 2,8 пар/км^2 [12].

Оценка численности и характера распределения бекаса в различных местообитаниях производилась в мае — июне 2008—2013 гг. на территории

Ивановской области [15]. В ходе работы использовался метод учета на площадках, адаптированный к учету бекаса.

На заросшей околоводной растительностью обширной мелководной заводи Горьковского водохранилища были отмечены наибольшая плотность бекасов (29,2 пар/км^2) и наивысшая их активность. Довольно высока плотность населения бекасов и на влажных лугах — на побережье Горьковского водохранилища (19,0 пар/км^2) и в пойме р. Лух (13,5 пар/км^2). Высокая плотность населения бекасов была отмечена на обширных гарях соснового леса на зандровых песках Балахнинской низины и составила в среднем 11,9 пар/км^2.

Несколько ниже средняя плотность населения была на выработанных торфяных полях — 7,4 пар/км^2. Но распределен бекас здесь был очень неравномерно, поскольку предпочитает умеренно обводненные поля и избегает как сухие, так и полностью залитые участки, а также поля с березовым мелколесьем и плотным березовым сухостоем. На выработанных торфяных карьерах плотность населения бекаса была стабильна и составила 8,3 пар/км^2.

На заброшенных сельхозугодьях наблюдалось постепенное увеличение увлажнения, вплоть до начала процессов заболачивания. И на таких участках также начинают селиться бекасы. Плотность населения на переувлажненных участках заброшенных полей составила 5,2 пар/км^2. В лесном массиве, перемежающемся с небольшими болотцами и озерами, плотность населения составила 5,6 пар/км^2.

На низинных и верховых болотах бекасы выявлены далеко не на всех таких обследованных участках и гнездятся с низкой плотностью — порядка 2—3 пар/км^2. На переходных болотцах, сформировавшихся в понижениях среди полей на моренной гряде, плотность бекаса была заметно выше (10,6 пар/км^2).

Следует отметить, что на характер биотопического распределения бекаса влияют следующие ключевые факторы среды: наличие открытых, необлесенных участков, мелководных водоемов или заболоченностей с участками открытой воды, подходящих присад, чаще — сухостойных деревьев с обломанной вершиной, а также взаимоотношения с другими видами птиц, сроки проведения палов.

Дупель (*Gallinago media*). Немногочисленный, локально распространенный вид. В регионе выявлен ряд постоянных мест обитания и токов дупеля. В пойме р. Клязьмы в Клязьминском республиканском заказнике дупель поселяется на локальных участках со средней плотностью населения от 1,4 до 0,4 пар/км^2. Места концентрации и токов дупеля здесь смещаются в зависимости от высоты и продолжительности весеннего паводка. Тока дупеля выявлены в пойме р. Лух, на побережье Горьковского водохранилища. В последние годы дупеля начали заселять увлажненные участки на заброшенных сельхозугодьях. Гнездовая группировка на заброшенных полях в течение ряда лет наблюдается в окрестностях г. Иванова на полях учхоза ИГСХА.

Гаршнеп (*Lymnocryptes minimus*). Очень редкий, возможно, гнездящийся вид. Токование гаршнепа регулярно, на протяжении ряда лет отмечалось в среднем течении р. Лух, в устье р. Уводь, на болотах и торфяных полях Балахнинской низины, на побережье Горьковского водохранилища (Андрониховская пойма). 20 июня 2000 г. в Клязьминском заказнике на болоте Косовка был отмечен выводок гаршнепа — 3 неуверенно летающих птенца (личное сообщение Р. Ю. Киселева и С. Ю. Подвинцевой).

Библиографический список

1. *Бубнов М. А.* О пребывании и гнездовании большого веретенника и турухтана в Костромской и Ивановской областях // Зоол. журн. 1957. № 36 (4). С. 629—631.
2. *Бубнов М. А.* Материалы к познанию птиц юго-запада Костромской и севера Ивановской областей // Бюл. МОИП. Отд. биол. 1967. Т. 123. С. 35—46.
3. *Воронцов Е. М., Хохлова Н. А.* Формирование фауны Горьковского водохранилища // Орнитология. 1963. Вып. 6. С. 306—310.
4. *Герасимов Ю. Н., Сальников Г. М., Буслаев С. В.* Птицы Ивановской области. М., 2000. 125 с.
5. Гнездящиеся кулики Балахнинской низины / В. Н. Мельников, Д. Е. Чудненко, Р. Ю. Киселев, А. Н. Ушаков, А. А. Бабаев // Достижения в изучении куликов Северной Евразии : тез. докл. VII Междунар. совещания, Мичуринск, 5—8 февраля 2007 г. Мичуринск, 2007. С. 48—49.
6. Заметки о редких видах куликов Ивановской области / В. Т. Бутьев, В. Н. Мельников, Д. А. Шитиков, С. Н. Баринов, Р. Ю. Киселев // Изучение куликов Восточной Европы и Северной Азии на рубеже столетий : материалы IV и V совещаний по вопросам изучения и охраны куликов. М., 2002. С. 22—27.
7. К динамике численности большого веретенника в сельхозугодьях Нечерноземного центра / О. В. Суханова, А. Л. Мищенко, В. П. Иванчев, В. Н. Мельников, В. В. Гриднева // Кулики Северной Евразии: экология, миграции и охрана : тез. докл. VIII Междунар. конф., Ростов н/Д, 10—12 ноября 2009 г. Ростов н/Д, 2009. С. 142—144.
8. *Мельников В. Н.* О необходимости внесения большого веретенника в Красную книгу Ивановской области // Редкие животные и грибы : материалы по ведению Красной книги Ивановской области. Иваново, 2012. С. 52—56.
9. *Мельников В. Н.* Результаты учета бекаса в Ивановской области в 2008—2009 гг. // Кулики Северной Евразии: экология, миграции и охрана : тез. докл. VIII Междунар. конф., Ростов н/Д, 10—12 ноября 2009 г. Ростов н/Д, 2009. С. 97—99.
10. *Мельников В. Н., Мельникова Г. Б.* Население куликов побережий рек Восточного Верхневолжья // Кулики Восточной Европы и Северной Азии: изучение и охрана : материалы IV совещ. Екатеринбург, 2004. С. 36—37.
11. *Мельников В. Н., Хрулева О. Б.* Динамика населения птиц в ходе зарастания заброшенных сельхозугодий в Восточном Верхневолжье // Развитие современной орнитологии в Северной Евразии : тр. XII Междунар. орнитол. конф. Северной Евразии. Ставрополь, 2006. С. 416—423.
12. *Мельников В. Н., Баринов С. Н., Усов Ю. В.* Кулики Клязьминского заказника // Изучение куликов Восточной Европы и Северной Азии на рубеже столетий : материалы IV и V совещ по вопросам изучения и охраны куликов. М., 2002. С. 102.
13. *Мельников В. Н., Чудненко Д. Е., Ушаков А. Н.* Гнездящиеся кулики торфяных разработок Восточного Верхневолжья // Кулики Восточной Европы и Северной Азии: изучение и охрана : материалы IV совещ. Екатеринбург, 2004. С. 37—38.
14. Орнитофауна Клязьминского заказника / В. Н. Мельников, С. Н. Баринов, Р. Ю. Киселев, С. В. Романова // Инвентаризация, мониторинг и охрана ключевых орнитологических территорий России. М., 2001. Вып. 3. С. 60—67.
15. *Mel'nikov V. N.* Common Snipe, Great Snipe, and Jack Snipe in the eastern upper Volga area // Seventh European Woodcock and Snipe Workshop : proceedings of an International Symposium of The IUCN/Wetlands Woodcock & Snipe Specialist Group, Saint-Petersburg (Russia), 16—18 May 2011. Paris, 2013. P. 89.

ХИМИЯ

УДК 542.947.7:547.821.411:548.98

М. В. Клюев

ВЛИЯНИЕ РАСТВОРИТЕЛЯ НА КАТАЛИТИЧЕСКОЕ ГИДРИРОВАНИЕ БЕНЗОНИТРИЛА

Изучено гидрирование бензонитрила при атмосферном давлении водорода и температуре 50 °C в присутствии промышленного никель-хромового катализатора в среде н-гексана, диметилформамида и этанола. Показано, что в апротонных растворителях бензонитрил гидрируется до бензальбензиламина, а в этаноле до дибензиламина. Обсуждается предполагаемая схема протекающих при этом реакций.

Ключевые слова: катализ, гидрирование, бензонитрил, влияние растворителя, никель-хромовый катализатор, дибензиламин, бензальбензиламин.

The article studies hydrogenation of benzonitrile under hydrogen atmospheric pressure and the temperature of 50 C in presence of industrial nickel-chrome catalyst. It is shown that in aprotonic solvents (hexane and dimethilformamide) benzonitrile hydrogenates to benzalbenzylamine, but in ethanol — to dibenzilamine. The suggested scheme of the reactions taking place is discussed.

Key words: catalysis, hydrogenation, benzonitrile, solvent influence, nickel-chrome catalyst, dibenzilamine, benzalbenzylamine.

Амины относятся к одним из востребованных продуктов общего и тонкого органического синтеза. Несмотря на обилие способов их получения, современные промышленные способы связаны с гидрированием азотсодержащих соединений, например нитро- [3, 4, 5], которое можно совмещать с гидрогенизационным аминированием [1, 4, 5]. Каталитическое гидрирование нитрилов, скажем на никелевых катализаторах [7, 8], также является одним из перспективных способов получения аминов и их производных. В большинстве случаев продуктами гидрирования нитрилов являются соответствующие первичные, вторичные и третичные амины, выход которых зависит от природы катализатора, температуры реакции, давления водорода и применяемого растворителя, который влияет не только на скорость, но и на маршрут реакции.

В настоящей работе исследовалось гидрирование бензонитрила. Реакцию проводили в стеклянном термостатируемом реакторе, снабженном магнитной мешалкой, при атмосферном давлении водорода и температуре 50 °C в среде соответственно этанола, гексана или диметилформамида (ДМФА) в присутствии промышленного никель-хромового катализатора с размером частиц не более $7{,}5 \cdot 10^{-5}$м. Содержимое реактора перемешивали магнитной мешалкой со скоростью 900—1000 об/мин, достаточной для протекания процесса в кинетической области. В экспериментах использовали свежеперегнанные растворители (этанол, гексан, ДМФА). Электролитический водород дополнительной очистке не подвергался. Продукты реакции гидрирования анализировали методом газожидкостной хроматографии [2, 6] на хроматографе модели 3700 (Россия) с пламенно-ионизационным детектором (колонка из нержавеющей стали (3 мм • 1 м) с неподвижной фазой 5 % XE-60 на носителе Chezasorb AW (0,20—0,36 мм); газ-носитель — гелий (1,8 л/ч)). Продукты реакции идентифицировали с помощью ИК- и ЯМР-спектроскопии на приборах ИКС-26 и Tesla BS-467 A соответственно, с применением обычных методик.

Полученные результаты и их обсуждение

При гидрировании бензонитрила в гексане (табл., пп. 1, 2) единственным продуктом реакции является N-бензилиденбензальамин, который был выделен и идентифицирован. В ИК-спектре зафиксирована интенсивная полоса поглощения в области 1650 $см^{-1}$, соответствующая связи —CH=N—, а в ЯМР-спектре наблюдаются сигналы протонов с химическим сдвигом 7,85, 6,78 и 4,48 м.д., которые можно отнести к атомам водорода соответственно группы —CH=N—, бензольного кольца и метиленовой группы.

Гидрирование бензонитрила в присутствии никель-хромового катализатора

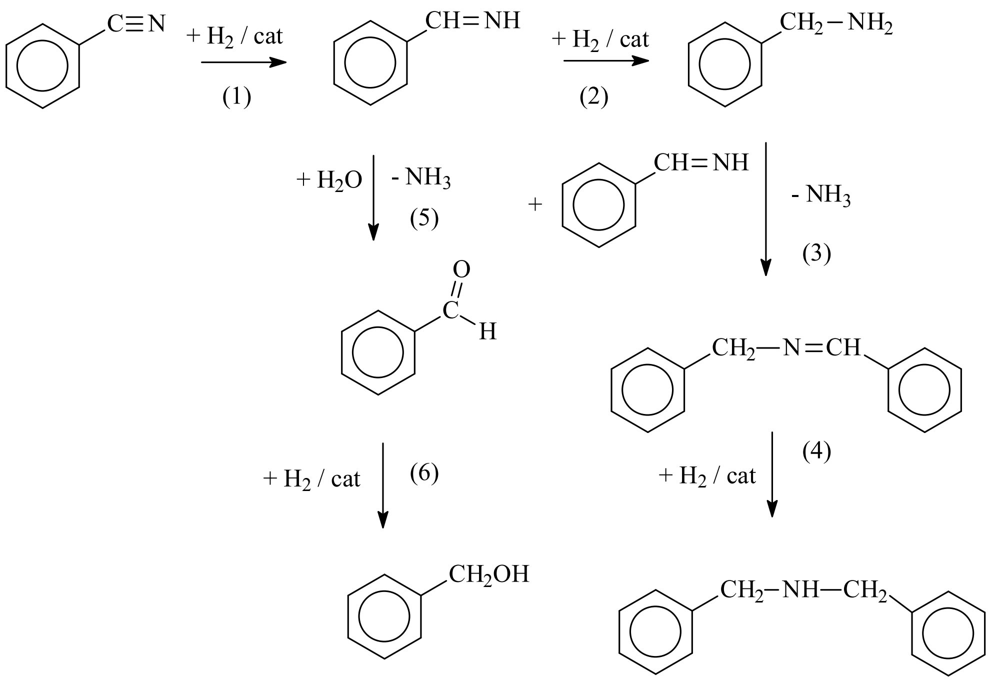
№ п/п	Растворитель	Время, мин	Выход продуктов реакции, %			
			Бензонитрил	N-бензилиденбензальамин	Дибензиламин	Бензиловый спирт
1	н-гексан	5	55	45	0	0
2	н-гексан	10	0	100	0	0
3	ДМФА	3	88	12	0	0
4	ДМФА	10	64	36	0	0
5	ДМФА	20	45	55	0	0
6	ДМФА	30	36	64	0	0
7	ДМФА	40	27	73	0	0
8	ДМФА	50	20	80	0	0
9	этанол	3	90	8	2	0
10	этанол	7	60	35	5	0
11	этанол	10	35	45	20	0
12	этанол	15	2	65	31	2
13	этанол	20	0	55	42	3
14	этанол	30	0	40	55	5
15	этанол	40	0	32	61	7
16	этанол	50	0	27	64	9
17	этанол	60	0	20	68	12

Примечание. Условия реакции: промышленный никель-хромовый катализатор — 0,2 г, растворитель — 15 мл, 50 °C, 1 атм H_2, бензонитрил — 17 ммоль/л.

При использовании в качестве растворителя ДМФА (табл., пп. 3—8) процесс протекает в том же направлении, но с меньшей скоростью: если в гексане реакция заканчивается за 10 мин, то в ДМФА за это же время превращается лишь 36 % бензонитрила (табл., ср. п. 2 и п. 4). Это можно в первом приближении объяснить конкуренцией молекул ДМФА и бензонитрила за место в координационной сфере активных центров катализатора, каковыми, по-видимому, являются кластеры никеля.

В этаноле в аналогичных условиях наряду с N-бензилиденбензальамином образуются дибензиламин и бензиловый спирт (табл., пп. 9—17). Скорость гидрирования бензонитрила при этом выше, чем в ДМФА, но ниже, чем в гексане (табл., ср. пп. 2, 4 и 11). Очевидно, что в условиях проведения гидрирования в этаноле N-бензилиденбензальамин гидрируется до дибензиламина, поскольку со временем концентрация азометина в реакционной смеси проходит через максимум в 65 %, что соответствует 15 мин гидрирования (табл., п. 12). Бензиловый спирт начинает образовываться не сразу. Его концентрация монотонно увеличивается и достигает 12 % за 60 мин гидрирования (табл., п. 17).

Различие продуктов реакции при использовании протонных и апротонных растворителей, по-видимому, связано с участием протонов растворителя в стадии гидрирования бензальбензиламина, а также с гидролизом имина, протекающим под действием воды в этаноле.



Реакции, протекающие при гидрировании бензонитрила на никель-хромовом катализаторе

Таким образом, согласно полученным экспериментальным данным, в гексане и ДМФА гидрирование бензонитрила протекает по маршруту 1 — 2 — 3, а в этаноле одновременно реализуются маршруты 1 — 2 — 3 — 4 и 1 — 5 — 6 (см. схему).

Библиографический список

1. *Клюев М. В.* // Рос. хим. журн. 2006. Т. 50, вып. 3. С. 93—103.

2. *Клюев М. В., Рамазанов Д. Н.* // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2011. Вып. 2. С. 46—55.

3. *Козлов А. И., Збарский В. Л.* // Рос. хим. журн. 2006. Т. 50, вып. 3. С. 131—139.

4. *Магдалинова Н. А., Калмыков П. А., Клюев М. В.* // Нефтехимия. 2012. Т. 52, вып. 5. С. 333—338.
5. *Магдалинова Н. А., Клюев М. В., Вершинин Н. Н., Ефимов О. Н.* // Кинетика и катализ. 2012, Т. 53, вып. 4. С. 505—508.
6. *Рамазанов Д. Н., Клюев М. В.* // Изв. вузов. Сер.: Химия и хим. технология. 2009. Т. 52, № 4. С. 44—46.
7. Способ получения аминов путем гидрирования нитрильных соединений : патент 2470010 Рос. Федерация ; заявл. 02.10.2008 ; опубл. 20.12.2012. URL: http://patent-2470010.pdf (дата обращения: 08.04.2014).
8. Способ получения первичных аминов гидрированием нитрилов : патент 2292333 Рос. Федерация ; заявл. 13.02.2003 ; опубл. 27.01.2007. URL: http://patent-2292333.pdf (дата обращения: 08.04.2014).

УДК 544.18:544.424.2:544.362.4

Е. Н. Крылов

ДЕСКРИПТОРЫ ОРГАНИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ: КВАНТОВО-ХИМИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ РЕАКЦИОННОЙ СПОСОБНОСТИ

Рассмотрены основы количественной теории жестких и мягких кислот и оснований Пирсона и примеры анализа различных органических реакций. Данный подход к реакционной способности органических соединений может быть эффективным инструментом диагностики механизмов органических реакций наряду с принципом линейности свободных энергий, принципом полилинейности, методологией QSAR — QSPR, принципами Белла — Эванса — Поляни и рядом других концепций теоретической органической химии.

Ключевые слова: реакционная способность, теория жестких и мягких кислот и оснований Пирсона, электрофильность, жесткость, функция Фукуи.

The article considers the principles of HSAB concept (hard and soft acids and bases), and the examples of different acute organic reactions analysis. The mentioned approach to the organic compounds' reactivity can serve as an effective instrument for acute organic reactions diagnosing alongside with free energy linearity principle, multilinear principle, QSAR — QSPR methodology, Bell — Evans — Polanyi principle, and other concepts of theoretical organic chemistry.

Key words: reactivity, Pearson`s hard and soft acid and bases theory, electrophilicity, hardness, Fukui function.

Введение

Концепция жестких и мягких кислот и оснований (hard — soft acid — base, HSAB), введенная в химический обиход Р. Пирсоном [66], была успешно применена для описания и объяснения течения многих химических реакций [65]. Дальнейший перевод этой концепции на количественную основу, сделанный Р. Парром и Р. Пирсоном [63] путем введения количественного представления о химической жесткости как параметре, сопутствующем электроотрицательности, позволил придать физический смысл таким эмпирическим химическим концепциям, как электроотрицательность, электронный химический потенциал, молекулярная химическая жесткость и мягкость [85]. Развитие теории функционала плотности в квантовой химии [64], в свою очередь, позволило получить теоретическое обоснование химической реакционной способности [71] в рамках так называемой концептуальной теории функционала плотности (DFT) [46].

Коллективные монографии [39, 75] отражают достаточно большую часть достижений в этой области теоретической химии.

Одним из направлений, развиваемых в рамках концептуальной DFT, является теоретическое обоснование и проверка возможности практического применения молекулярных параметров — дескрипторов — для описания реакционной способности, механизмов реакций и структур интермедиатов и переходных состояний [75].

Молекулярные дескрипторы являются численными характеристиками структурных особенностей молекул, отвечающих за проявление определенных химических и физико-химических свойств [76]. Дескрипторы классифицируются на экспериментально измеряемые (примерами таких дескрипторов могут быть σ-константы Л. Гаммета [5] и параметры, предложенные К. Хэншем, см. [53]) и рассчитываемые на основе различных теоретических представлений.

Такими дескрипторами, в частности, являются индексы реакционной способности (ИРС), основанные на DFT [39]. Они используются в настоящее время в самых различных областях химии, в том числе для диагностики механизмов органических реакций и описания химической активности органических соединений [75]. К ним относятся жесткость (η), поляризуемость (или мягкость) (S), электрофильность (ω), электронный химический потенциал (μ), а также ИРС, описывающий динамику передачи электронной плотности на электрофил с реакционного центра субстрата (донора) в процессе электрофильной атаки, называемый функцией Фукуи (FF) [35]. Аналогично нуклеофильность определяется индексом нуклеофильности [43].

Для характеристики взаимодействий «электрофил — нуклеофил», к которым относятся очень многие органические реакции, введен индекс локального различия R [33]. Электронодонорная и электроноакцепторная сила реагентов характеризуется ИРС, обозначенными ω^- и ω^+ соответственно и полученными из разложения в ряд Тейлора выражения для DFT-энергии как функции числа электронов [45].

На основе теории DFT [47] проведено также количественное описание стерических эффектов фрагментов органических молекул [77].

На основе представлений теории DFT были выведены принципы реализации химических реакций, в частности принцип достижения минимальной электрофильности [59] и максимальной жесткости [32], на основании которых созданы представления о диаграммах «структура — стабильность» [34], характеризующих стабильность молекул, ароматических систем и магических кластеров. Показано, однако, что эти принципы соблюдаются не всегда [62], что указывает на некоторую ограниченность применимости этих представлений, сопоставимых с ограничениями принципа полилинейности и принципов Белла — Эванса — Поляни [8].

Эти ИРС получены [31] путем приложения теории DFT [82] к теории жестких и мягких кислот и оснований Пирсона [66] и распространены на теорию реакционной способности органических соединений [65]. Кроме цитированных выше работ Р. Парра и его коллег, значительный вклад в квантово-химическую теорию реакционной способности внесли работы [67], в которых обнаружены новые, имеющие химический смысл, связи жесткости и электроотрицательности со свойствами атомов в рамках теории DFT [68].

Здесь $\mu = 0.5[E(HOMO) + E(LUMO)]$, $\eta = 0.5[E(LUMO) - E(HOMO)]$, $\omega = 0.5\mu^2/\eta$, $S = 1/\eta$ [75]. E(HOMO) — энергия высшей занятой молекулярной орбитали, E(LUMO) — энергия низшей вакантной молекулярной орбитали. Уровни энергии определяют при расчете структур методами DFT [35]. Вывод расчетных формул проведен методом конечных разностей [37] из выражений для частных производных энергии по числу электронов в системе, которые получены на основе теорий канонического и изоморфного ансамблей [42].

Сложность использования метода заключается в том, что для определения указанных ИРС, вероятно, лучше использовать метод Хартри — Фока, а DFT применять только для оптимизации структуры тех соединений, чья реакционная способность подвергается анализу [80]. Этот вопрос до сих пор не нашел принципиального решения [81], и единая точка зрения не выработана [85]. Считается [40], что точные значения энергий орбиталей Кона — Шэма соответствуют вертикальным ионизационным потенциалам с учетом релаксации, однако линейные корреляции между этими величинами имеют статистически значимый ненулевой свободный член [84], свидетельствующий о систематическом сдвиге этих величин относительно друг друга.

Сложности наблюдаются и при расчете анионных форм [51], которые служат моделями переходных состояний нуклеофильных реакций. Вероятно, именно поэтому предлагается [69] для упрощения процедур расчета проводить требуемые для определения ИРС вычисления на основе полуэмпирического метода PM6 [73], а не привлекать расчеты высокого уровня теории. В общем случае точность расчета определяется видом функционала [83], как это показано на примере сопоставления известных к настоящему времени методов, однако такое обсуждение выходит за рамки данного обзора.

Достоинством таких ИРС является их динамический характер, поскольку они характеризуют реакционную способность в динамике перемещения электронной плотности (заряда) [46] и выравнивания электроотрицательности в химическом процессе [50]. Как известно, электронный химический потенциал представляет собой первую производную энергии по числу электронов ($\mu = \delta E/\delta N$), а жесткость — вторую ($\eta = \delta^2E/\delta N^2$) [36].

Указанные ИРС характеризуют реакционную способность молекулы как целого [44]. Для характеристики активности отдельных реакционных центров введены локальные интерпретации этих параметров [57], опирающиеся на локальный ИРС — FF [26] и представляющие собой произведения глобальных параметров на FF. В частности, локальная электрофильность ω(лок) есть характеристика реакционного центра, равная ω(лок) = FFω, а локальная жесткость η(лок) = ηFF.

Так, например, в реакциях электрофильного ароматического замещения увеличение электронодонорной способности реакционного центра (атома углерода в ароматической системе) способствует их течению, что диагностируется увеличением FF, равной разности зарядов на реакционном центре в переходном (Q^+) и исходном (Q^0) состояниях $FF = Q^+ - Q^0$.

Показано, что индекс локальной жесткости представляется хорошим дескриптором для описания ориентации при электрофильном ароматическом замещении [58]. Ряд ИРС — локальная жесткость, индексы электрофильности и нуклеофильности — адекватно описывают реакции электрофильного присоединения, окисление по Байеру — Виллигеру, нуклеофильное замещение при реализации механизма S_N2 [57] и предсказывают преимущественное направление реакции [20] гетероциклизации.

В качестве модели переходного состояния выбирается структура, близкая к переходному состоянию с учетом постулата Хэммонда [7], что для процессов электрофильного ароматического замещения, а также палладирования или протонирования соответствует структуре их катион-радикалов, а для реакций нуклеофильного замещения — анионной форме субстрата. При этом, естественно, следует учитывать тот факт, что указанные ИРС не соответствуют ни термодинамическим, ни кинетическим эффектам, а представляют собой комбинацию последних в зависимости от типа реакции [44].

Поскольку почти все органические реакции протекают в среде растворителей, был проведен ряд исследований, определивших закономерности изменения общих и локальных ИРС при изменении полярности растворителей. В частности, обнаружено [52], что FF увеличиваются при увеличении диэлектрической проницаемости растворителя только в апротонных средах, протонные же растворители изменяют FF органических молекул лишь незначительно. Общие (глобальные) ИРС уменьшаются при переносе молекул в растворитель, причем в тем большей степени, чем выше диэлектрическая постоянная среды.

Жесткость системы представляет собой характеристику устойчивости молекулярной структуры по отношению к изменению на ней электрического заряда. Индекс электрофильности, или просто электрофильность, представляет собой по физическому смыслу меру энергетической стабилизации системы, когда она приобретает дополнительный заряд (электронную плотность) от нуклеофила [20]. По определению $\omega = \mu^2/2\eta$ [29], поэтому электрофильность является аналогом электрической мощности, электронный химический потенциал — аналог напряжения, а жесткость — аналог сопротивления в электротехнике в соответствии с известным законом $W = V^2/R$ (W — мощность, V — напряжение, R — сопротивление) [38].

Теория и эксперимент

Данный метод был успешно применен при анализе реакционной способности полиметилбензолов в реакции бромирования (1) их молекулярным бромом в среде AcOH [16], а также ряда ароматических субстратов в реакции нитрования (2) [13, 14]:

$$ArH + Br_2 \rightarrow ArBr + HBr, \quad (1)$$
$$ArH + NO_2^+ \rightarrow ArNO_2 + H^+. \quad (2)$$

Во всех случаях относительная реакционная способность ароматических соединений антибатна их электрофильности, а факторы парциальных скоростей симбатны величинам FF реакционных центров [2, 13], что соответствует физическому смыслу этих ИРС и электрофильному характеру реакции. Для реакции бромирования относительная реакционная способность полиметилбензолов симбатна компоненту тензора квадрупольной поляризуемости в направлении, перпендикулярном плоскости ароматической структуры [2], что указывает на определяющую роль поляризуемости при дальней ориентации электрофила. Кроме того, данный компонент тензора квадрупольной поляризуемости (Q_{ZZ}) изменяется симбатно мягкости органического субстрата, что и соответствует симбатным зависимостям между относительной реакционной способностью и мягкостью субстратов [2].

Электрофильный характер лимитирующей стадии реакции ароматического дехлорирования изомерных дихлорбензолов и хлорзамещенных пиридинов [4] определен на основе симбатных зависимостей между скоростью дехлорирования и величинами FF реакционных центров и на основе антибатной зависимости между реакционной способностью ароматических хлорпроизводных и их общей электрофильностью.

Учет неспецифической сольватации реагентов может быть проведен введением соответствующих поправок при квантово-химическом расчете (в рамках метода PCM или SCIPCM), а специфической сольватации — путем расчета ИРС для соответствующих сольватных комплексов «реагент — растворитель» [18].

Для реакций ацильного переноса обзоры по исследованию таких процессов, протекающих в средах органических растворителей, описывают влияние заместителей, уходящей группы, растворителя и сольватации обоих видов (специфической и неспецифической) как с кинетической точки зрения [10], так и в квантовохимическом аспекте на уровне расчетов поверхностей потенциальной энергии [11].

С другой стороны, реакции замещения на sp^2-гибридном атоме углерода на примере процессов аминирования замещенных эфиров ароматических карбоновых кислот [15] и взаимодействия ароматических сульфонилхлоридов с нуклеофильными реагентами [12] могут быть описаны также на основе количественной теории ЖМКО Пирсона. При этом показано, что вследствие значительной перестройки геометрии взаимодействующих эфиров и аминов данный подход хотя и позволяет обнаружить физически обоснованный тренд зависимостей между реакционной способностью эфиров и ИРС, однако соответствующие корреляционные коэффициенты не столь удовлетворительны, как в ряде других случаев.

Приложение количественной теории Пирсона к анализу кислотности ароматических сульфокислот в сочетании с методами корреляционного анализа позволило успешно рассчитать [6] величины их pKa, которые, имея отрицательные значения (до –6 и ниже), экспериментальными методами определяются крайне ненадежно.

Развитие этой теории и ее использование на современном этапе достаточно подробно описано в книге [23], где приведены приложения ее в химических и биологических науках, а также в науках о материалах. В частности, обсуждаются проблемы понимания происхождения химической активности (реакционной способности) на основе приложения концептуальной теории функционала плотности [30].

Далее рассмотрены авторские примеры приложения количественной теории Пирсона и основанных на ней ИРС к некоторым органическим реакциям.

Реакции нуклеофильного замещения в фенэтилхлоридах

Реакции нуклеофильного замещения в замещенных фенэтилхлоридах (XPhCHClMe) (ФЭХ) представляют собой удобную модель реакций замещения на sp^3 гибридном атоме углерода и исследованы как с точки зрения влияния заместителей по Гаммету [49], так и на уровне влияния растворителя на реализацию механизмов S_N2 [49] и SET [22], осложненных образованием ионных пар [49], а также в плане реализации кинетического изотопного эффекта уходящей группы ($^{35}Cl/^{37}Cl$) [56]. В принципе, возможна реализация всего спектра механизмов от S_N1 до S_N2 при широком изменении внешних условий и смене уходящей группы (Cl на Br) [55]. Связанная с реализацией механизма S_N1 устойчивость замещенных карбкатионов ФЭХ рассмотрена в работе [70]. Современные исследования проводят сопоставление реакций замещения на атоме сульфонильной серы и карбонильном атоме углерода карбоксильной группы в хлорпроизводных этих функциональных групп [27], в том числе на квантово-химическом уровне рассматривая нуклеофугность и электрофугность уходящих групп [28]. Аналогичное исследование на основе квантово-химических свойств субстратов (электрофильность ω, нуклеофильность ω^-, жесткость η и т. д. [39]) ранее не проводилось.

Реакция идет в соответствии со схемой (3) как нуклеофильное замещение на sp^3-атоме углерода, причем анилины являются нуклеофилами, ФЭХ — электрофилами по α-атому углерода:

$$XPhNH_2 + YPhCHClMe \rightarrow XPhNH\text{-}CH_2(Me)PhY + HCl. \qquad (3)$$

Расчет структур молекул ФЭХ, их анионов (в качестве модели предельной структуры, в которую превращается ФЭХ при нуклеофильной атаке) и замещенных анилинов проведен программным комплексом NWChem ver. 6.3 [78].

Параметры молекул: электронный химический потенциал $\mu = 0.5[E(LUMO) + E(HOMO)]$, жесткость $\eta = 0.5[E(LUMO) - E(HOMO)]$ и электрофильность $\omega = 0.5\mu^2/\eta$, рассчитаны в соответствии с представлениями количественной теории ЖМКО, основанной на концептуальной теории DFT [75]. Локальная электрофильность реакционных центров — α-атомов углерода этильного заместителя, несущего атом хлора (уходящую группу) — определена из соотношения $\omega(\text{лок}) = \omega FF(C)$.

Соотношения между общей электрофильностью и реакционной способностью ФЭХ (в виде logK скорости взаимодействия ФЭХ с замещенными анилинами [54]) в целом согласуются с представлением о нуклеофильном характере взаимодействия, поскольку чем выше электрофильность (динамическая электроноемкость реакционного центра или субстрата), тем выше константа скорости (табл. 1). Кроме того, чем выше активность нуклеофила, тем меньше чувствительность реакции к изменению электрофильности субстрата в соответствии с соотношением между активностью и селективностью реакции [8] (табл. 1).

Здесь и далее R — эмпирический коэффициент корреляции, sA и sB — статистически вероятный разброс в коэффициентах корреляционного уравнения с поправкой на объем выборки по критерию Стьюдента, SD — стандартное отклонение, усредненное по выборке, N — объем выборки, P — вероятность *случайного* появления корреляции (везде менее 0.05) [1].

Таблица 1

Корреляции реакционной способности ФЭХ (в виде logK [54]) на общую электрофильность: logK = (A ± sA) + (B ± sB)ω. Реагент $XPhNH_2$. N = 6

X	A ± sA	B ± sB	R	SD	P
4-OMe	12.38 ± 2.69	3.82 ± 0.99	0.887	0.324	0.018
4-Me	13.29 ± 2.96	4.18 ± 1.09	0.886	0.357	0.019
H	14.51 ± 3.21	4.56 ± 1.18	0.891	0.386	0.017
4-Cl	16.10 ± 3.52	5.27 ± 1.31	0.897	0.428	0.015
3-NO_2	19.62 ± 4.15	6.63 ± 1.53	0.908	0.500	0.012

Поскольку соотношение между общей электрофильностью и реакционной способностью ФЭХ (табл. 1) имеют хотя и высокие, проходящие проверку на статистическую значимость [1], но не вполне удовлетворительные коэффициенты корреляции, следовало учесть и реакционную способность нуклеофила путем расчета локальной нуклеофильности его по соотношению

$$\omega^{-} = 0.5\eta(Nu)[\mu(Nu) - \mu(E))]2/[\eta(Nu) - \eta(E)], \quad (4)$$

где символы Nu относятся к замещенным анилинам, E — к замещенным ФЭХ. Эти индексы, рассчитанные с учетом свойств электрофилов (замещенных ФЭХ), приведенные в табл. 2, отлично коррелированы с константами скоростей взаимодействия ФЭХ с анилинами, как это показано на примере (5) взаимодействия 4-MePhCHClMe с замещенными анилинами $XPhNH_2$. Для взаимодействий других ФЭХ с теми же анилинами зависимости аналогичны (табл. 3).

Антибатность этих зависимостей не согласуется с представлением о согласованном S_N2 механизме реакции, поскольку в этом случае должна наблюдаться симбатная зависимость, однако соответствует реализации ионно-парного механизма, предполагаемого авторами [49], а также согласуется с представлением о возможности реализации в исследуемой реакции механизма SET [22].

Таблица 2

Определение квантово-химических параметров замещенных анилинов $XPhNH_2$ (E — хартри, Q — e, μ,ω,η — eV)

X	E(HOMO)	E(LUMO)	Q(N)0	Q(N)-	μ	η	ω^{-} (Y = 4-Me)*
4-OMe	–0.21291	–0.02579	–0.2009	–0.0440	–3.248	3.112	0.1443
4-Me	–0.22091	–0.02502	–0.1956	–0.0240	–3.346	3.132	0.1099
H	–0.22752	–0.02426	–0.1904	–0.0090	–3.426	3.131	0.0850
4-Cl	–0.22800	–0.02550	–0.1848	–	–3.449	–0.109	–0.0056
3-NO_2	–0.24306	–0.10196	–0.1748	0.0143	–4.694	3.077	0.1170

* ω^{-} определена относительно 4-метилфенэтилхлорида.

$$\log K = (2.898 \pm 0.047) - (0.677 \pm 0.047)\omega^{-},$$
$$R = 0.995,\ SD = 0.005,\ N = 4,\ P = 0.005 \quad (5)$$

Таблица 3

Корреляционные соотношения между индексом нуклеофильности анилинов и константами скоростей YPhCHClM:
$\log K(Y) = (A \pm sA) + (B \pm sB)\omega^{-}$. N = 4

Y	A ± sA	B ±sB	R	SD	P
4-Me	2.90 ± 0.05	–0.68 ± 0.05	0.995	0.005	0.005
4-t-Bu	2.77 ± 0.01	–0.13 ± 0.08	0.748	0.001	0.252
3-Me	1.85 ± 0.03	1.06 ± 0.23	0.957	0.030	0.043
H	1.51 ± 0.06	0.97 ± 0.37	0.882	0.060	0.118
4-Cl	1.29 ± 0.07	1.34 ± 0.40	0.921	0.070	0.080
4-NO_2	–0.06 ± 0.09	4.26 ± 0.71	0.974	0.097	0.026

По мере увеличения акцепторных свойств заместителя в ФЭХ чувствительность реакции к нуклеофильности замещенных анилинов также увеличивается, что противоречит принципу антибатности между активностью и селективностью, поскольку увеличение положительного заряда на реакционном центре (α-атоме углерода) должно бы ускорять реакцию и снижать чувствительность реакции к изменению нуклеофильности амина. Вероятно, увеличение акцепторных свойств заместителя в ФЭХ вызывает затруднение анионоидного отрыва уходящей группы (хлорид-аниона), в связи с чем ее удаление становится скорость-определяющей стадией, а переходное состояние — в соответствии с диаграммой О’Феррала — Дженкса [60] — сдвигается по перпендикулярной координате в сторону механизма S_AN.

Реакции нуклеофильного замещения на атоме сульфонильной серы

Приложение количественной теории кислот и оснований Пирсона в рамках DFT-индексов реакционной способности предполагает наличие общей картины зависимости реакционной способности в рамках реакционной серии. Однако *орто*-замещенные ароматические соединения проявляют аномальные свойства в силу сближенности соседних заместителей, что приводит к проявлениям так называемого *орто*-эффекта [3]. Он вызван как электронными, так и стерическими взаимодействиями, что приводит к непредсказуемым явлениям и соотношениям между свойствами заместителей и свойствам самих соединений, что показано, в частности, на примере реакционной способности ароматических сульфонилхлоридов ($ArSO_2Cl$) в реакциях нуклеофильного замещения на атоме сульфонильной серы [9].

Механизм этой реакции исследован достаточно подробно [9, 74]. Проблема заключается в определении соотношения между механизмами S_N1, S_N2, S_AN и согласованным механизмом с участием молекул воды в циклическом переходном состоянии, а также в соотношении степени образования связи «сера — нуклеофил» и разрыва связи «сера — хлор» [17, 19].

Для анализа на основе указанной теории была рассмотрена модельная реакция гидролиза ароматических сульфонилхлоридов, идущая в соответствии со схемой

$$XPhSO_2Cl + HOH \rightarrow XPhSO_2OH + HCl. \qquad (6)$$

Все параметры структур молекул замещенных бензолсульфонилхлоридов (табл. 4, 5) проведены программным комплексом NWChem ver. 6.0 [79] на уровне метода PM6 [73] и схемы разделения зарядов APT, основанной на дипольных моментах связей и имеющей вследствие этого определенный физический смысл [41] в отличие от схемы Малликена [72].

Таблица 4

Расчет глобальных величин химического потенциала (μ), жесткости (η), электрофильности (ω) и локальной электрофильности ω(лок) = ωFF для орто-$XPhSO_2Cl$

X	μ	η	ω	FF, e	ω(лок) = ωFF	logK
H	–5.97594	4.729104	3.775753	0.909	3.432159	–2.527
2-Me	–5.71185	4.605699	3.541834	0.847	2.999933	–2.325
2-NO_2	–6.79514	4.580393	5.040397	0.820	4.133125	–3.190
2-NO_2-4-Cl	–6.76385	4.329230	5.283814	0.892	4.713162	–3.335
2-CF_3	–6.43799	4.734818	4.376910	0.912	3.991742	–2.975

Примечание. Все величины (кроме FF) — eV; константы скорости гидролиза K — из работ [9, 21].

Вследствие значительных стерических и иных *орто*-взаимодействий в *орто*-замещенных бензолсульфонилхлоридах их реакционная способность хотя и описывается в рамках представлений теории жестких и мягких кислот и оснований [65] (рис. 1), однако характер корреляции logK на ω(лок) $ArSO_2Cl$ является антибатным, что противоречит физическому смыслу этого ИРС. Вероятно, стадией, определяющей скорость, является вовсе не нуклеофильная атака (в этом случае следовало бы ожидать симбатной зависимости в координатах рис. 1), а анионоидный отрыв уходящей группы. С этой точки зрения антибатность указанной зависимости (7) вполне естественна, поскольку увеличение электрофильности субстрата снижает вероятность анионоидного отрыва [7, 43, 61].

Данные табл. 4 и 5 объединены в общую выборку, которая показывает (рис. 1), что все замещенные бензолсульфонилхлориды образуют *единую* реакционную серию (7) со стадией анионоидного отрыва хлорид-аниона в качестве стадии, лимитирующей скорость.

Таким образом, в результате квантово-химического анализа реакционной способности изомерных ядернозамещенных бензолсульфонилхлоридов в реакции гидролиза в 1% водном диоксане на основе индекса локальной электрофильности на реакционном центре — атоме сульфонильной серы — обнаружена антибатная зависимость между реакционной способностью ароматических сульфонилхлоридов и локальной электрофильностью реакционного центра, свидетельствующая в пользу анионоидного отрыва уходящей группы (хлорид-аниона) как стадии, лимитирующей скорость исследуемого процесса. Указанная зависимость наблюдается не только для *орто*-замещенных бензолсульфонилхлоридов, имеющих стерические аномалии в реакционной способности, но и для *мета*- и *пара*-изомеров, таких аномалий не имеющих, вследствие чего все замещенные сульфонилхлориды образуют единую реакционную серию в реакции гидролиза в среде водного диоксана.

Таблица 5

Расчет глобальных величин химического потенциала (μ), жесткости (η), электрофильности (ω) и локальной электрофильности ω(лок) = ωFF для мета- и пара-$XPhSO_2Cl$

X	μ	η	ω	FF	ω(лок)	logK
4-MeO-	–5.5695	4.5349	3.4201	0.963	3.293	–2.182
4-Me-	–5.8282	4.7462	3.5784	0.952	3.407	–2.488
4-Cl-3-NO_2-	–6.7490	4.4401	5.1293	0.260	1.334	–2.893
4-CN-	–4.9833	6.2312	1.9926	0.972	1.937	–2.678
3,4-Cl_2-	–6.0811	4.3072	4.2928	0.908	3.899	–2.827
3-Br-	–5.9844	4.4518	4.0223	0.867	3.488	–2.719
3-Cl-	–5.9569	4.4219	4.0124	0.861	3.454	–2.777
4-Cl-	–6.1184	4.5619	4.1030	0.960	3.939	–2.693
4-NO_2-	–6.9340	4.4690	5.3788	0.667	3.586	–2.618
4-Br-	–6.1306	4.5369	4.1422	0.951	3.941	–2.674
3-NO_2-	–6.8637	4.7031	5.0084	0.875	4.385	–2.896
4-F-	–6.2644	4.8091	4.0800	0.928	3.787	–2.770

Примечание. Все величины (кроме FF) — eV; K — из работ [9, 48].

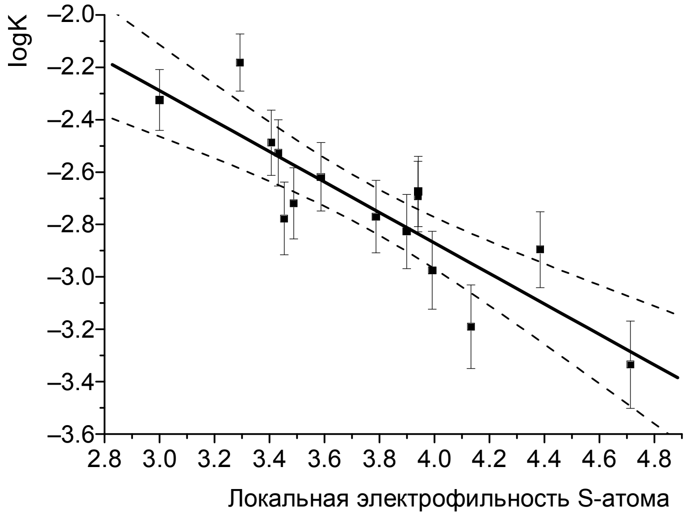


Рис. 1. Корреляция реакционной способности всех замещенных бензолсульфонилхлоридов на локальную электрофильность реакционного центра — атома сульфонильной серы

$$\log K = (-0.54 \pm 0.35) - (0.58 \pm 0.09)\omega(\text{лок}),$$
$$R = -0.868,\ SD = 0.155,\ N = 15,\ P = 0.0001 \qquad (7)$$

Реакции гидродехлорирования

Для реакции дегидрохлорирования (8) замещенных хлорбензолов (XPhCl) в метаноле при 40 °C зависимость (9) между начальной активностью субстратов (logRg [25], табл. 6) и общей электрофильностью (рис. 2) аналогична.

$$XPhCl + H_2 \rightarrow XPhH + HCl \qquad (8)$$

$$\begin{gathered} \log Rg = (7.28 \pm 1.72) - (3.25 \pm 0.72)\omega, \\ R = 0.897,\ SD = 0.258,\ N = 7,\ P = 0.06 \end{gathered} \qquad (9)$$

Расчет электрофильности и FF в рамках схемы Хиршфельда проведен программным комплексом ADF2013 [24] на уровне теории M06/6-311+G* в рамках метода IEFPCM при заданной диэлектрической проницаемости растворителя для рабочей температуры (ε = 29.66).

Корреляция относительной активности на FF, однако, несистематична, что указывает на определяющую роль в реакционной способности исследуемых субстратов общего параметра — электрофильности молекулы, а не электроноемкости реакционного центра.

Таблица 6

Начальная активность субстратов XPhCl в процессе гидродехлорирования H_2 на катализаторе $Pd/AlPO_4/SiO_2/MeOH$/40 °C как функция ω

X (Р.Ц.*)	logRg	FF	E(HOMO)	E(LUMO)	ω	ω(лок)
4-Me C6	–0.367	0.107	–0.25835	–0.02463	2.330	0.248
4Cl C6	–1.013	0.099	–0.26431	–0.03403	2.629	0.259
4-F C6	–1.495	0.108	–0.26661	–0.03357	2.630	0.284
4-NH_2 C5	–0.025	0.089	–0.22801	–0.02550	2.159	0.192
3-Me C7	–0.335	0.097	–0.26402	–0.02523	2.384	0.232
2-Me C8	–0.299	0.106	–0.26365	–0.02456	2.363	0.249
H C2	–0.127	0.110	–0.26819	–0.02468	2.396	0.263

* Р.Ц. (атом углерода) — реакционный центр относительно заместителя.

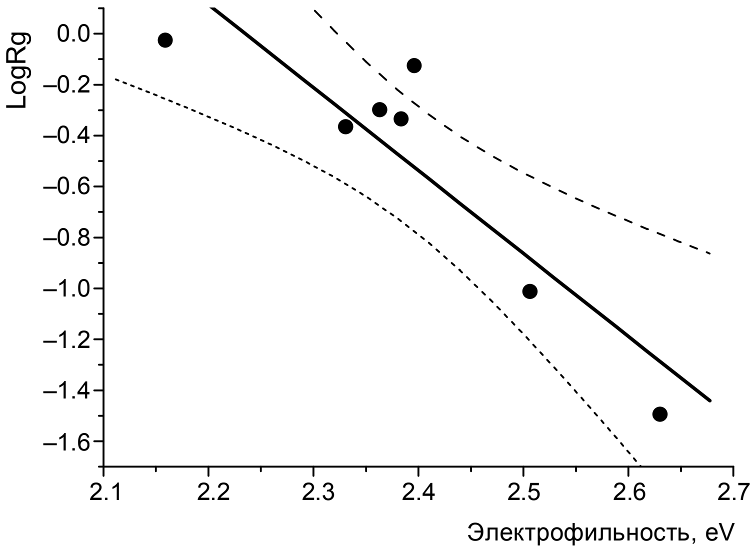


Рис. 2. Начальная активность субстратов (Rg) [25] при дегидрохлорировании на катализаторе $Pd/AlPO_4/SiO_2/MeOH$/40 °C как функция их общей электрофильности

Наблюдаемая картина соответствует электрофильной стадии реакции как стадии, определяющей скорость, поскольку увеличение электроноемкости (ω) реакционного центра в этом случае замедляет реакцию. Таким образом, теоретический анализ реакции дегидрохлорирования на основе количественной теории жестких и мягких кислот и оснований Пирсона совпадает по смыслу с качественной оценкой влияния заместителей (акцепторы тормозят реакцию, доноры, напротив, ускоряют [25]). Подтверждение тому дает корреляция параметра относительной активности субстратов как на индукционный эффект (по константам Тафта), так и на эффект сопряжения заместителей (по резонансным константам) с отрицательными коэффициентами у обоих слагаемых в двухпараметрическом корреляционном уравнении [25].

Заключение

Примеры анализа различных реакций на основе теории жестких и мягких кислот и оснований в количественном варианте показывают, что рассматриваемый подход к реакционной способности органических соединений может быть эффективным инструментом диагностики механизмов органических реакций наряду с принципом линейности свободных энергий, принципом полилинейности, методологией QSAR — QSPR, принципами Белла — Эванса — Поляни и рядом других теоретических концепций.

Следует, однако, представлять и ограничения метода, поскольку чисто электронная теория не может дать достаточно точного предсказания и описания химического процесса, который сопровождается либо сильными геометрическими перестройками при реализации переходных состояний, либо не столь значительным переносом заряда, т. к. в процессе определения ИРС проводится расчет структур исходя из полного переноса одного электрона, что, естественно, является приближением.

Библиографический список

1. *Ахназарова С. А., Кафаров В. В.* Оптимизация эксперимента в химии и химической технологии. М. : Высш. шк., 1985. 327 с.
2. *Белякова М. В., Зубанова Е. А., Крылов Е. Н.* // Изв. вузов. Сер.: Химия и хим. технология. 2013. Т. 56, № 11. С. 23—28.
3. *Бутин К. П.* // Рос. хим. журн. 2001. Т. 45, вып. 2. С. 11—34.
4. *Вирзум Л. В., Крылов Е. Н.* // Сб. ст. VI Всерос. молодежной школы-конф. «Квантово-химические расчеты: структура и реакционная способность органических и неорганических молекул» / ИГХТУ. Иваново, 2013. С. 155—159.
5. *Гаммет Л.* Основы физической органической химии. М. : Мир, 1972. 534 с.
6. *Горпинюк А. А., Крылов Е. Н.* // Сб. ст. VI Всерос. молодежной школы-конф. «Квантово-химические расчеты: структура и реакционная способность органических и неорганических молекул» / ИГХТУ. Иваново, 2013. С. 172—177.
7. *Днепровский А. С., Темникова Т. И.* Теоретические основы органической химии. Л. : Химия, 1991. 560 с.
8. *Дьюар М., Догерти Р.* Теория возмущений молекулярных орбиталей в органической химии. М. : Мир, 1977. 696 с.
9. *Иванов С. Н.* Эффекты среды в реакциях сольволиза функциональных производных ароматических сульфокислот : дис. … д-ра хим. наук. Иваново, 2004. 328 с.
10. Кинетика реакций ацильного переноса / Л. В. Курицын, Т. П. Кустова, А. И. Садовников, Н. В. Калинина, М. В. Клюев. Иваново : Иван. гос. ун-т. 2006. 260 с.

11. *Кочетова Л. Б., Кустова Т. П., Калинина Н. В.* // Изв. РАН. Сер. хим. 2009. Вып. 4. С. 725—729.
12. *Крылов Е. Н., Богданова Т. С.* // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 47—55.
13. *Крылов Е. Н., Вирзум Л. В., Груздев М. С.* // Бутлеровские сообщения. 2011. Т. 24, № 4. С. 80—89.
14. *Крылов Е. Н., Вирзум Л. В., Иванова Ю. М.* // Изв. вузов. Сер.: Химия и хим. технология. 2012. Т. 55, вып. 2. С. 37—43.
15. *Крылов Е. Н., Ефимова Д. О.* // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 56—63.
16. *Крылов Е. Н., Зубанова Е. А., Иванова Ю. М.* // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 58—67.
17. *Литвиненко Л. М., Олейник Н. М.* Механизмы действия органических катализаторов : основной и нуклеофильный катализ. Киев : Наук. думка, 1984. 264 с.
18. *Мочалова А. Ю., Крылов Е. Н.* // Сб. ст. VI Всерос. молодежной школы-конф. «Квантово-химические расчеты: структура и реакционная способность органических и неорганических молекул» / ИГХТУ. Иваново, 2013. С. 232—237.
19. *Савёлова В. А., Олейник Н. М.* Механизмы действия органических катализаторов : бифункциональный и внутримолекулярный катализ. Киев : Наук. думка, 1990. 294 с.
20. *Стегленко Д. В., Минкин В. И., Террье Ф.* // Изв. РАН. Сер. хим. 2009. № 8. С. 1602—1608.
21. *Сумин А. С.* // Молодая наука в классическом университете : тез. докл. конф. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2012. С. 68.
22. *Черняева Е. А., Крылов Е. Н.* // IV школа-семинар молодых ученых «Квантово-химические расчеты: структура и реакционная способность органических и неорганических молекул» : сб. материалов / ИГХТУ. Иваново, 2009. С. 206—209.
23. A Matter of Density Exploring the Electron Density Concept in the Chemical, Biological and Material Sciences / ed. by N. Sukumar. New York : Wiley-VCH, 2013. 328 p.
24. ADF2013. SCM Theoretical Chemistry. Vrije University. Amsterdam. The Netherlands. URL: http://www.scm.com (дата обращения: 27.02.2014).
25. *Aramendia M. A., Marinas J. M., Urbano F. J. et al.* // Appl. Catal. B: Environmental. 2003. Vol. 43. P. 71—79.
26. *Ayers P. W., Parr R. G.* // J. Am. Chem. Soc. 2000. Vol. 122, № 9. P. 2010—2018.
27. *Bently T. W.* // J. Org. Chem. 2008. Vol. 73, № 16. P. 6251—6257.
28. *Bentley T. W.* // Chem. Eur. J. 2006. Vol. 12. P. 6514—6520.
29. *Chakraborty A., Das R., Chattaraj P. K.* // J. Phys. Org. Chem. 2011. Vol. 24. P. 854—864.
30. *Chakraborty A., Duley S., Chattaraj P. K.* // A Matter of Density Exploring the Electron Density Concept in the Chemical, Biological and Material Sciences / ed. by N. Sukumar. New York : Wiley-VCH, 2013. P. 157—200.
31. *Chandrakumar K. R. S., Pal S.* // Int. J. Mol. Sci. 2002. Vol. 3. P. 324—337.
32. *Chattaraj P. K., Ayers P. W., Melin J.* // Phys. Chem. Chem. Phys. 2007. Vol. 9. P. 3853—3856.
33. *Chattaraj P. K., Duley S., Domingo R. L.* // Org. Biomol. Chem. 2012. Vol. 10. P. 2855—2861.
34. *Chattaraj P. K., Duley S., Vigneresse J.-L.* // Theor. Chem. Acc. 2012. Vol. 131. P. 1089—1097.
35. *Chattaraj P.K., Giri S., Duley S.* // Chem. Rev. 2011. Vol. 111. № 2. P. PR43—PR75.
36. *Chattaraj P. K., Roy S. D. R.* // IANCAS Bulletin. 2006. P. 307—313.
37. *Chattaraj P. K., Sarkar U., Roy D. R.* // Chem. Rev. 2006. Vol. 106, № 6. P. 2065—2091.
38. *Chaquin P.* // Chem. Phys. Lett. 2008. Vol. 458. P. 231—234.
39. Chemical Reactivity Theory : a Density Functional View / ed. by P. K. Chattaraj. New York : CRC Press, 2009. 610 p.

40. *Chong D. P., Gritsenko O. V., Baerends E. J.* // J. Chem. Phys. 2002. Vol. 116, № 5. P. 1760—1772.
41. *Cioslowski J.* // J. Am. Chem. Soc. 1989. Vol. 111. P. 8333—8336.
42. *De Proft F., Liu S.-B., Parr R. G.* // J. Chem. Phys. 1997. Vol. 107, № 8. P. 3000—3006.
43. *Domingo L. R., Perez P.* // Org. Biomol. Chem. 2011. Vol. 9. P. 7168—7175.
44. *Fuentealba P., David J., Guerra D.* // J. Mol. Struct : THEOCHEM. 2010. Vol. 943. P. 127—137.
45. *Gazques J. L., Cedillo A., Vela A.* // J. Phys. Chem. A. 2007. Vol. 111, № 10. P. 1966—1970.
46. *Geerlings P., De Proft F.* // Int. J. Mol. Sci. 2002. Vol. 3. P. 276—309.
47. *Geerlings P., De Profr F., Langenaeker W.* // Chem. Rev. 2003. Vol. 103, № 5. P. 1793—1873.
48. *Haughton A. R., Laird R. M., Spence M. J.* // J. Chem. Soc. Perkin Trans. II. 1975. № 6. P. 637—643.
49. *Ikchoon L., Won H. L., Bentley T. W.* // J. Chem. Soc. Perkin Trans. II. 1993. P. 141—146.
50. *Islam N., Chosh D.C.* // Int. J. Model. 2012. Vol. 13. P. 2160—2175.
51. *Jensen F.* // J. Chem. Theory Comput. 2010. Vol. 6, № 9. P. 2726—2735.
52. *Kar R., Pal S.* // Int. J. Quant. Chem. 2010. Vol. 110, № 9. P. 1642—1647.
53. *Kubinyi H.* QSAR: Hansch Analysis and Related Approaches. New York : Wiley-VCH, 1993. 240 p.
54. *Lee I., Lee W. H., Bentley T. W.* // J. Chem. Soc. Perkin Trans. II. 1993. № 2. P. 146—150.
55. *Lim Ch., Kim S.-H., Yoh S.-D.* // Terahedron Lett. 1997. Vol. 38, № 18. P. 3243—3246.
56. *McLennan D. J., Stein A. R., Dobson B.* // Can. J. Chem. 1986. Vol. 64. P. 1201—1205.
57. *Meneses L., Araya A., Sanchez F.* // Int. J. Quant. Chem. 2010. Vol. 110, № 13. P. 2360—2370.
58. *Meneses L., Contreras R., Fuentealba P.* // Chem. Phys. Lett. 2004. Vol. 393. P. 181—187.
59. *Morell C., Labet V., Chermette H.* // Phys. Chem. Chem. Phys. 2009. Vol. 11. P. 3417—3423.
60. *O'Ferral M.* // J. Chem. Soc. B. 1970. № 2. P. 274—277.
61. *Ormazabal-Toledo R., Campodonico P. R., Contreras R.* // Org. Lett. 2011. Vol. 14, № 4. P. 822—824.
62. *Pan S., Sola M., Chattaraj P. K.* // J. Phys. Chem. A. 2013. Vol. 117. P. 1843—1852.
63. *Parr R. G., Pearson R. G.* // J. Am. Chem. Soc. 1983. Vol. 105, № 26. P. 7512—7516.
64. *Parr R. G., Yang W.* // Ann. Rev. Phys. Chem. 1995. Vol. 46. P. 701—728.
65. *Pearson R. G.* Chemical Hardness : Applications from Molecules to Solids. Weinheim : Wiley-VCH : Verlag GMBH, 1997. 200 p.
66. *Pearson R. G.* // J. Am. Chem. Soc. 1963. Vol. 85, № 22. P. 3533—3539.
67. *Putz M.* // Int. J. Quantum Chem. 2006. Vol. 106. P. 361—389.
68. *Putz M.* // Int. J. Quantum Chem. 2009. Vol. 109. P. 733—738.
69. *Puzin T., Suzuki N., Haranczyk M.* // J. Chem. Inform. Model. 2008. Vol. 48, № 6. P. 1174—1180.
70. *Richard J. P., Rothenberg M. E., Jencks W. P.* // J. Am. Chem. Soc. 1984. Vol. 106, № 5. P. 1361—1372.
71. *Rong Ch., Lu T., Liu S. B.* // J. Chem. Phys. 2014. Vol. 140. P. 024109-1—024109-9.
72. *Saha S., Roy R. K., Ayers P. W.* // Int. J. Quant. Chem. 2009. Vol. 109, № 9. P. 1790—1806.
73. *Stewart J. J. P.* // J. Molec. Modeling. 2007. Vol. 13, № 12. P. 1173—1213.
74. The Chemistry of Sulphonic Acid and Their Derivatives / ed. by S. Patai, Z. Rappoport. Chichester : Wiley and Sons, 1991. 286 p.
75. Theoretical Aspects of Chemical Reactivity / ed. by A. Toro-Labbe. Oxford : Elsevier, 2007. 322 p.
76. *Todeschini R., Consonni V.* Molecular Descriptors for Chemoinformatics. New York : Wiley-VCH, 2009. 1257 p.

77. *Torrent-Sucarrat M., Liu S. B., De Proft F.* // J. Phys. Chem. A. 2009. Vol. 113, № 15. P. 3698—3702.
78. *Valiev M. et al.* // Comput. Phys. Commun. 2010. Vol. 181. P. 1477—1489.
79. *Van Dam H. J. J. et al.* // WIREs Computational Molecular Science. 2011. Vol. 1, № 11/12. P. 888—894.
80. *Vargas R., Garza J., Cedillo A.* // J. Phys. Chem. A. 2004. Vol. 109, № 39. P. 8880—8892.
81. *Vijayaraj R., Subramanian V., Chattaraj P. K.* // J. Chem. Theory Comput. 2009. Vol. 5, № 10. P. 2744—2753.
82. *Yung D. C.* Computational Chemistry. New York : J. Wiley & Sons Inc., 2001. 380 p.
83. *Zhang G., Musgrave C. B.* // J. Phys. Chem. A. 2007. Vol. 111, № 8. P. 1554—1561.
84. *Zhan C. G., Nicols J. A., Dixon D. A.* // J. Phys. Chem. A. 2003. Vol. 107, № 20. P. 4184—4195.
85. *Zielinski F., Tognetti V., Joubert L.* // Chem. Phys. Lett. 2012. Vol. 527. P. 67—72.

УДК 544.424.2:544.362.4:544.183.25:547.562.3

Е. Н. Крылов

КВАНТОВО-ХИМИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА МЕХАНИЗМА РЕАКЦИИ АРОМАТИЧЕСКОГО ГИДРОДЕГАЛОГЕНИРОВАНИЯ

Субстраты состава PhH_xF_y ($x = 6 - y$, $y = 1 \div 6$) в реакции гидродефторирования при 1 атм и 298 K на Rh/Al_2O_3 в водной фазе имеют относительную реакционную способность, обратную общей электрофильности молекулы (ω), осложненную стерическими затруднениями при электрофильной атаке (и, вероятно, адсорбции), что вытекает из характера корреляционных зависимостей logKrel = f(ω). Относительная реакционная способность арилхлоридов в реакции гидродехлорирования пропорциональна устойчивости их Pd-комплексов XPhPdCl (X — заместитель). Стадия, лимитирующая скорость реакции, представляет собой палладирование субстрата по атому углерода, несущему галоген.

***Ключевые слова**:* гидродефторирование, индексы реакционной способности, электрофильность, функции Фукуи, электрофильное замещение, палладирование.

The substrates of the composition PhH_xF_y ($x = 6 - y$, $y = 1 \div 6$) in hydrodefluorination reactions under 1 atm and 298 K on Rh/Al_2O_3 in water phase have relative reaction ability inverse to general electrophilicity of its molecules. The reaction ability is complicated by steric difficulties by electrophilic attack and probably by absorptions). This follows from nature of correlation dependencies logKrel = f(ω). The relative reaction ability of arylchlorides in a hydrodechlorination reaction are proportional to stability their Pd-complexes XPhPdCl (X — substituent). The limiting stage of reactions presents itself palladation of aromatic substrates on carbon atom carrying halogen.

***Key words**:* hydrodefluorination, indexes of reaction ability, electrophilicity, Fukui functions, electrophilic substitution, palladation.

Введение

Проблема утилизации галогенорганических соединений, использование которых противоречит принципам зеленой химии [26], в настоящее время представляется актуальной как с практической стороны, так и в теоретическом плане. Одним из наиболее перспективных методов удаления галогенорганических загрязнителей является реакция гидродегалогенирования их молекулярным водородом в присутствии палладиевых катализаторов [11], механизм которой до сих пор в деталях не установлен [20]. Катализаторы на основе палладия имеют большие перспективы для использования [28].

Во многих реакциях арилгалогенидов, катализируемых палладием, in situ образуются арилпалладиевые реагенты [29]. Поэтому процесс гидродегалогенирования может быть представлен как хемосорбция субстрата на катализаторе с последующим либо электрофильным палладированием по одному из ключевых атомов углерода и дальнейшим восстановительным депалладированием молекулярным водородом, либо как протонирование по этому атому углерода с последующим отщеплением галогена [25]. Первая стадия реакции будет лимитировать скорость процесса, поскольку электрофильная атака на ключевой атом углерода затруднена вследствие электроноакцепторного σ-эффекта соседнего атома галогена. В ряде случаев, однако, следует учитывать и стерические затруднения в процессе хемосорбции [13, 20].

Диагностика и описание химической активности органических соединений осуществляются различными методами, в том числе методом индексов реакционной способности (ИРС) теории функционала плотности (DFT) [15]. Такими индексами являются жесткость (η, обратная поляризуемости S), электрофильность (по физическому смыслу — электроноемкость, ω) и электронный химический потенциал (μ), а также ИРС, описывающий динамику передачи электронной плотности на электрофил с реакционного центра субстрата (донора) в процессе электрофильной атаки, называемый функция Фукуи (FF). Метод основан на приложении теории DFT [30] к теории ЖМКО Пирсона [21] и распространен на теорию реакционной способности органических соединений [27]. Здесь $\mu = 0.5[E(HOMO) + E(LUMO)]$, $\eta = 0.5[E(LUMO) - E(HOMO)]$, $\omega = 0.5\mu 2/\eta$ [9], E(HOMO) и E(LUMO) — энергии высшей занятой и низшей свободной молекулярных орбиталей соответственно.

В реакциях с электрофилами увеличение электронодонорной способности реакционного центра способствует ее течению, что диагностируется увеличением FF [$FF = Q^+ - Q^0$] для данного реакционного центра (Q^+ — заряд на реакционном центре в переходном состоянии, Q^0 — в исходном). В качестве модели переходного состояния выбирается структура, близкая к переходному состоянию с учетом постулата Хэммонда [5], что для процесса палладирования (протонирования) ароматических соединений соответствует структуре их катион-радикалов (σ-комплексов протонирования). Данный метод был успешно применен при анализе реакционной способности дихлорбензолов и дихлорпиридинов при гидродехлорировании их на палладиевых катализаторах в среде этанола [2], а также для реакций ароматического электрофильного замещения — нитрования и бромирования [9] и нуклеофильного замещения на карбонильном атоме углерода [8] и атоме сульфонильной серы [7].

Результаты и их обсуждение

Гидродефторирование фторорганических соединений как частный случай гидродегалогенирования протекает в соответствии со схемой

$$XPhF + H_2 \rightarrow XPhH + HF. \quad (1)$$

Расчет структур молекул фторбензола, изомерных полифторбензолов и их катион-радикалов (табл. 1) проведен комплексом NWChem ver. 6.0 [29] на уровне теории DFT M06/6-311+G* в газофазном приближении без ограничений по типу симметрии, катион-радикалы рассчитаны в однодетерминантном приближении [3]. Заряды на реакционных центрах определены в схеме Хиршфельда [23].

При анализе зависимости $\log K_{rel}$ от общей электрофильности (ω) молекул субстратов обнаружено, что общая выборка распадается на четыре линейные зависимости (реакционных серии), в которых субстраты однозначно группируются по степени развития стерических препятствий гидродефторированию (табл. 2), в то время как в самих корреляциях относительная активность субстратов соответствует электрофильному характеру реакции гидродефторирования и обратно пропорциональна общей электрофильности субстратов.

Таблица 1

Гидродефторирование полифторбензолов (1) водородом в водной фазе на катализаторе 5 мас. % Rh/Al_2O_3 при атмосферном давлении и комнатной температуре

Субстрат	E(HOMO)	E(LUMO)	μ	η	ω	K_{rel}	$\log K_{rel}$
1	–0.27185	–0.02387	–4.024	3.374	2.399	1.00	0.000
2	–0.27485	–0.02697	–4.107	3.373	2.500	1.04	0.017
3	–0.27610	–0.02764	–4.133	3.380	2.526	0.67	–0.174
4	–0.26991	–0.03292	–4.120	3.224	2.632	0.74	–0.131
5	–0.28344	–0.03115	–4.280	3.433	2.669	0.87	–0.061
6	–0.27480	–0.03480	–4.212	3.265	2.717	0.62	–0.208
7	–0.28572	–0.02491	–4.226	3.549	2.517	0.31	–0.509
8	–0.28193	–0.03778	–4.350	3.322	2.848	0.73	–0.137
9	–0.28187	–0.03390	–4.296	3.374	2.736	0.44	–0.357
10	–0.27635	–0.03974	–4.301	3.219	2.873	0.51	–0.292
11	–0.28483	–0.04443	–4.480	3.271	3.068	0.61	–0.215
12	–0.29323	–0.05709	–4.766	3.213	3.536	0.58	–0.237

Примечания. Субстраты: 1 — FPh, 2 — 1,2-F_2Ph, 3 — 1,3-F_2Ph, 4 — 1,4-F_2Ph, 5 — 1,2,3-F_3Ph, 6 — 1,2,4-F_3Ph, 7 — 1,3,5-F_3Ph, 8 — 1,2,3,4-F_4Ph, 9 — 1,2,3,5-F_4Ph, 10 — 1,2,4,5-F_4Ph, 11 — 1,2,3,4,5-F_5Ph, 12 — 1,2,3,4,5,6-F_6Ph. Здесь и далее E — в единицах Хартри (a.u.), μ, η, ω — eV. K_{rel} — относительная константа скорости гидродефторирования [14].

Положительный наклон корреляции 4 (табл. 2) обусловлен преобладанием стерических эффектов заместителей над электронными, что согласуется с представлениями [19]. В этой реакционной серии уменьшается число стерически затрудненных для электрофильной атаки реакционных центров при одновременном увеличении электрофильности и π-донорного эффекта атомов фтора из *пара*-положения относительно реакционного центра ($\sigma_п^+ = –0.078$ [4]).

Таблица 2

Состав реакционных серий и параметры корреляций $\log K_{rel}$ на общую электрофильность субстратов ω в виде $\log K_{rel} = (A \pm sA) + (B \pm sB)\omega$

№	Субстраты	A ± sA	B ± sB	R	SD	P
1	2, 5, 8, 11	1.03 ± 0.05	–0.41 ± 0.02	0.998	0.0075	0.002
2	1, 4, 6, 10	1.50 ± 0.09	–0.63 ± 0.04	0.997	0.012	0.003
3	1, 3, 9	2.48 ± 0.34	–1.04 ± 0.13	0.992	0.032	0.080
4	7, 9, 10, 11	–1.83 ± 0.16	0.53 ± 0.06	0.989	0.022	0.011

Примечание. sA и sB — статистически вероятный разброс величин A и B, R — эмпирический коэффициент корреляции, SD — стандартное отклонение, P — вероятность *случайного* появления корреляционной зависимости [1].

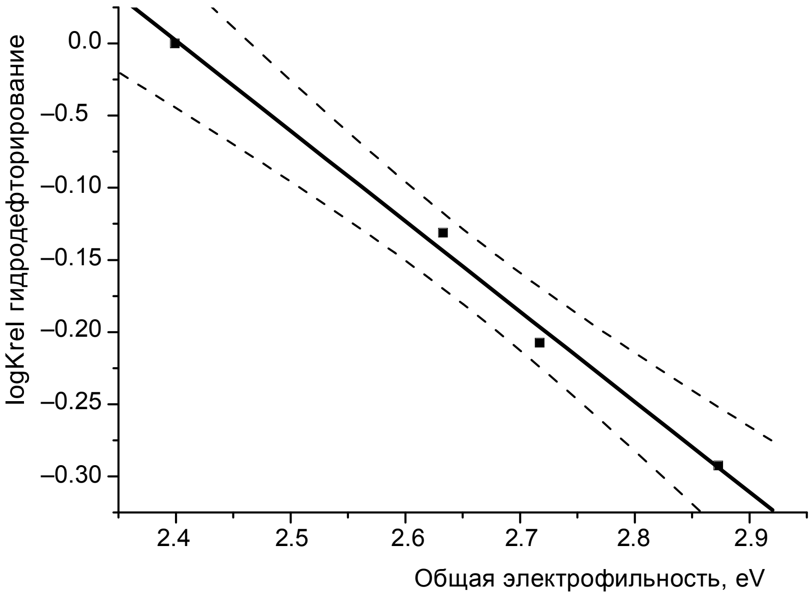


Рис. 1. Корреляция 2 табл. 2. Штриховые линии соответствуют 95 %-му доверительному интервалу (коридору ошибок)

Одновременно с уменьшением чувствительности реакции к изменению электрофильности (выражаемой коэффициентом B) возрастает чувствительность реакции к изменению стерики заместителей (табл. 2), что косвенно отражается в коэффициенте A. Эти параметры линейно коррелированы, что приводит к появлению зависимости (2), эквивалентной изокинетическому соотношению, которая может быть интерпретирована в рамках компенсационного эффекта как линейное соотношение между изменением влияния электронных и стерических эффектов заместителей:

$$B = (0.03 \pm 0.02) - (0.42 \pm 0.01)A, \quad R = -0.9996,\ SD = 0.013,\ N = 3,\ P = 0.018. \tag{2}$$

Для другого родственного процесса — дегидрохлорирования (3) замещенных хлорбензолов (XPhCl) в метаноле при 40 °C — зависимость (4) между начальной активностью субстратов (logRg [13], табл. 3) и общей электрофильностью (рис. 2) аналогична. Расчет электрофильности и FF в рамках схемы Хиршфельда проведен программным комплексом ADF2013 [12] на уровне теории M06/6-311+G* в рамках метода IEFPCM при заданной диэлектрической проницаемости растворителя для рабочей температуры (ε = 29.66).

Таблица 3

Начальная активность субстратов XPhCl в процессе гидродехлорирования молекулярным водородом на катализаторе Pd/AlPO$_4$/SiO$_2$/MeOH/40 °C как функция их электрофильности

X (Р.Ц.*)	logRg	FF	E(HOMO)	E(LUMO)	ω	ω(лок)
4-Me C6	–0.367	0.107	–0.25835	–0.02463	2.330	0.248
4Cl C6	–1.013	0.099	–0.26431	–0.03403	2.629	0.259
4-F C6	–1.495	0.108	–0.26661	–0.03357	2.630	0.284
4-NH$_2$ C5	–0.025	0.089	–0.22801	–0.02550	2.159	0.192
3-Me C7	–0.335	0.097	–0.26402	–0.02523	2.384	0.232
2-Me C8	–0.299	0.106	–0.26365	–0.02456	2.363	0.249
H C2	–0.127	0.110	–0.26819	–0.02468	2.396	0.263

* Р.Ц. (атом углерода) — реакционный центр относительно заместителя.

$$XPhCl + H_2 \rightarrow XPhH + HCl. \quad (3)$$

Корреляция относительной активности на FF, однако, несистематична, что указывает на определяющую роль в реакционной способности исследуемых субстратов общего параметра — электрофильности молекулы, а не электроноемкости реакционного центра.

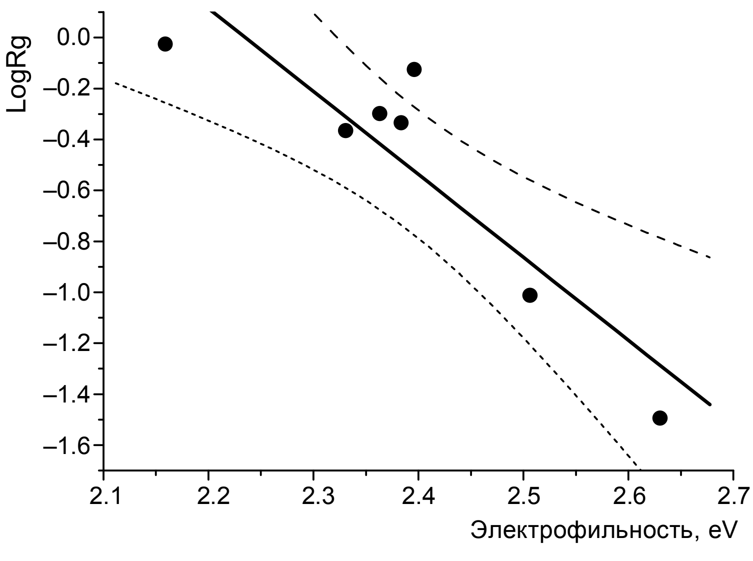


Рис. 2. Начальная активность субстратов (Rg) [13] при дегидрохлорировании на катализаторе Pd/AlPO$_4$/SiO$_2$/MeOH/40 °C как функция их электрофильности

$$\log Rg = (7.28 \pm 1.72) - (3.25 \pm 0.72)\omega,\ R = 0.897,\ SD = 0.258,\ N = 7,\ P = 0.06. \quad (4)$$

Таким образом, теоретический анализ реакции дегидрогалогенирования (дефторирования и дехлорирования) на основе количественной теории ЖМКО Пирсона подтверждает электрофильный механизм реакции. Это совпадает с качественной оценкой влияния заместителей (акцепторы тормозят реакцию, доноры, напротив, ускоряют [13]) и подтверждается корреляцией параметра относительной активности субстратов на индукционный эффект (по константам Тафта) и эффект сопряжения заместителей (по резонансным константам) с отрицательными коэффициентами у обоих слагаемых в двухпараметрическом корреляционном уравнении [13].

Для диагностики конкретной стадии, лимитирующей скорость, — палладирования или протонирования — был проведен расчет свободных энергий Гиббса некоторых арилгалогенидов, их σ-комплексов с протоном и комплексов с палладием (RPhPdX, R — заместитель, X — Cl или Br), а также палладия и протона в газовой фазе при рабочей температуре 553 K, что соответствует температуре и условиям газофазного гидродегалогенирования хлор- и бромбензолов и некоторых их производных, экспериментально полученных в работе [19] (табл. 4).

Расчет проведен программным комплексом ADF2013 [12] на уровне DFT с гибридным функционалом M06 [31] в полноэлектронном базисе DGDZVP (36 базисных функций и 114 примитивных функций Гаусса) [17], который рекомендован для расчета молекул с тяжелыми элементами и позволяет не прибегать к использованию псевдопотенциалов [10, 22]. Известно, что данный базис позволяет рассчитывать относительные энергии молекул и интермедиатов не хуже, чем на уровне PBE0/TZVP, имея гораздо меньшие требования к вычислительной системе [16], поэтому он был использован для расчета относительных энергий (характеризующих устойчивость интермедиатов) указанных выше молекул и частиц.

Расчет осуществлен в соответствии с известными термодинамическими соотношениями (5, 6), поскольку реакция проведена в газовой фазе:

$$\Delta G(\sigma) = G(\sigma) - [G(S) + G(H^+)], \quad (5)$$

$$\Delta G(SPdX) = G(SPdX) - [G(S) + G(Pd)]. \quad (6)$$

Здесь G(S), G(σ), G(SPdX), G(Pd) и $G(H^+)$ — соответственно свободные энергии Гиббса субстратов, их σ-комплексов с протоном, комплексов субстратов с Pd (RPhPdX), атома палладия и протона при рабочей температуре 553 K. Относительные устойчивости σ-комплексов с протоном и комплекса с Pd обозначены как ΔG(σ) и ΔG(SPdX) соответственно (табл. 4).

Судя по наличию линейной корреляции (7) с положительным трендом (рис. 3), свидетельствующим об увеличении скорости реакции гидродегалогенирования при увеличении относительной устойчивости палладиевого комплекса и отсутствии таковой между логарифмом константы скорости исследуемой реакции и относительной устойчивостью σ-комплексов протонирования, стадией, определяющей скорость гидродегалогенирования, является, вероятно, палладирование субстрата с образованием комплекса окислительного внедрения палладия в связь C—X (X — Cl, Br) со структурой R—Ph—Pd—X, а не протонирование, как считалось ранее [18, 24]. Следует отметить, что этот вывод справедлив для использованного набора экспериментальных данных, полученных в газовой фазе. Наличие растворителя может изменить механизм этой реакции, что требует специального исследования.

Таблица 4

Свободные энергии Гиббса субстратов и вероятных интермедиатов реакции дегидрогалогенирования (все в a.u. = Хартри) и относительные устойчивости σ-комплексов и комплекса с Pd (обе в ккал/моль)

Субстрат (S)	G(S)	G(σ)	G(SPdX)	ΔG(σ)	ΔG(SPdX)
13	–691.581435	–691.851827	–5631.087484	–156.34	2.84
14	–2805.013294	–2805.292079	–7744.524371	–161.60	–0.31
15	–730.848620	–731.132374	–5670.355060	–164.72	2.60
16	–730.850261	–731.127578	–5670.353944	–160.68	4.33
17	–730.850276	–731.132839	–5670.353561	–163.98	4.58
18	–766.786335	–767.075943	–5706.293099	–168.40	2.39
19	–766.784711	–767.054746	–5706.291638	–156.11	2.29
20	–766.784378	–767.080615	–5706.286694	–172.56	5.19
21	–1151.122831	–1151.394683	–6090.637268	–157.25	–2.42
22	–1151.125619	–1151.386072	–6090.631600	–150.10	2.89
23	–1151.125936	–1151.399004	–6090.627609	–158.02	5.59

Примечания. Субстраты: 13 — PhCl, 14 — PhBr, 15 — 2-ClPhMe, 16 — 3-ClPhMe, 17 — 4-ClPhMe, 18 — 2-ClPhOH, 19 — 3-ClPhOH, 20 — 4-ClPhOH, 21 — 1,2-Cl_2Ph, 22 — 1,3-Cl_2Ph, 23 — 4-Cl_2Ph. Свободная энергия Гиббса Pd G(Pd) = –4939.510580 a.u., для протона G(H^+) = –0.021252 a.u. (обе для 553 K).

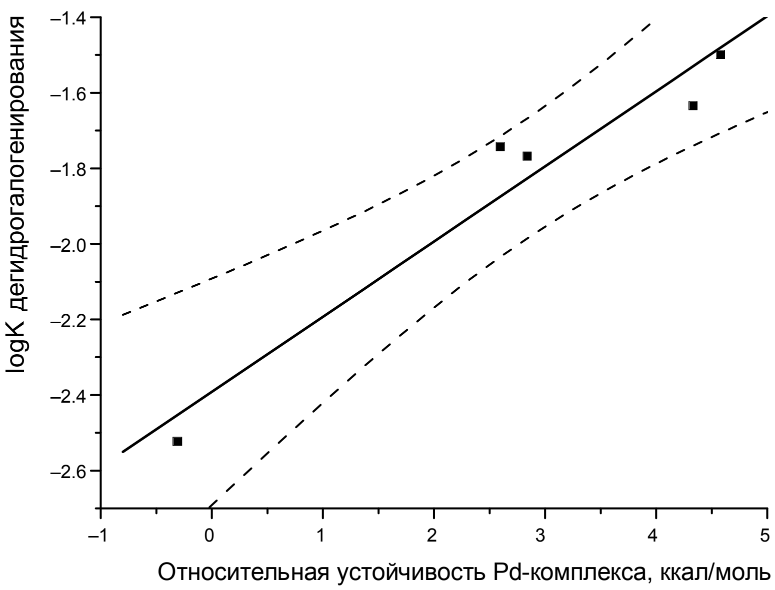


Рис. 3. Эффективная константа скорости гидродегалогенирования как функция относительной устойчивости Pd-комплексов арилгалогенидов (RPhPdX, R — заместитель, X — галоген, Cl или Br)

$$\log K = (-2.39 \pm 0.09) + (0.199 \pm 0.028)\,\Delta G(\mathrm{SPdX}),$$
$$R = 0.971,\ SD = 0.111,\ N = 5,\ P = 0.006. \quad (4)$$

В пользу палладирования как стадии, предпочтительной по сравнению с протонированием, говорит и предпочтительность взаимодействия ароматической системы (мягкого основания, по классификации Пирсона) и палладия (мягкой кислоты Пирсона) как взаимодействия «мягкий — мягкий». Это взаимодействие является более сильным в сравнении с протонированием ароматической системы по ключевому атому углерода, представляющим собой взаимодействие «мягкий — жесткий», более слабое, по теории Пирсона. Кроме того, протонирование галогенбензолов по ключевым атомам углерода неизбежно должно привести к их изомеризации вследствие 1,2-сдвига атома галогена (в частности, хлора) [6], в особенности при высоких температурах дегидрогалогенирования, чего в реальности не наблюдается [20].

Библиографический список

1. *Ахназарова С. Л., Кафаров В. В.* Методы оптимизации в химии и химической технологии. М. : Высш. шк., 1985. 327 с.
2. *Вирзум Л. В., Крылов Е. Н.* // Сб. ст. VI Всерос. молодежной школы-конф. «Квантово-химические расчеты: структура и реакционная способность органических и неорганических молекул» / ИГХТУ. Иваново, 2013. С. 155—159.
3. *Гарифзянова Г. Г., Шамоев А. Г., Храпковский Г. М.* // Сб. ст. XV Всерос. конф. «Структура и динамика молекулярных систем». Йошкар-Ола : Марийский гос. техн. ун-т, 2008. Т. 3. С. 17—20.
4. *Днепровский А. С., Темникова Т. И.* Теоретические основы органической химии. Л. : Химия, 1979. 520 с.
5. *Днепровский А. С., Темникова Т. И.* Теоретические основы органической химии. 2-е изд., перераб. и доп. Л. : Химия, 1991. 560 с.
6. *Ерыкалов Ю. Г.* Исследование изомерных превращений полигалоидобензолов в присутствии некоторых сопряженных кислот : дис. … д-ра хим. наук. Иваново, 1973. 227 с.
7. *Крылов Е. Н., Богданова Т. С.* // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 56—63.
8. *Крылов Е. Н., Ефимова Д. О.* // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 47—55.
9. *Крылов Е. Н., Зубанова Е. А., Иванова Ю. М.* // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 58—67.
10. *Юрьева А. Г., Полещук О. Х., Филимонов В. Д.* // Журн. структур. химии. 2008. Т. 49, № 3. С. 567—571.
11. *Юфит С. С., Злотин С. Г., Евдокимова Г. В., Шипкова Н. А.* // Зеленая химия в России : сб. ст. / под ред. В. В. Лунина, П. Тундо, Е. В. Локтевой. М. : Изд-во МГУ, 2004. С. 204—231.
12. ADF2013. SCM Theoretical Chemistry. Vrije University. Amsterdam. The Netherlands. URL: http://www.scm.com (дата обращения: 27.02.2014).
13. *Aramendia M. A., Borau V., Garsia I. M., Jimenez C., Marinas A., Marinas J. M., Urbano F. J.* // Appl. Catal. B: Enviromental. 2003. Vol. 43. P. 71—79.
14. *Baumgarten R., Stieger G. K., McNeill K.* // Environ. Sci. Technol. 2013. Vol. 47, iss. 12. P. 6545—6553.
15. Chemical Reactivity Theory : a Density Functional View / ed. by P. K. Chattaraj. New York : CRC Press, 2009. 610 p.
16. *Coquet R., Tada M., Iwasawa Y.* // Phys. Chem. Chem. Phys. 2007. Vol. 9. P. 6040—6046.
17. *Godbout N., Salahub D. R., Andzelm J., Wimmer E.* // Can. J. Chem. 1992. Vol. 70. P. 560—571.
18. *Hagh B. F., Allen D. T.* // Chem. Eng. Sci. 1990. Vol. 45, № 8. P. 2695—2701.

19. *Keane M. A.* // Appl. Catal. A: General. 2004. Vol. 271. P. 109—118.
20. *Keane M. A.* // ChemCatChem. 2011. Vol. 3. P. 800—821.
21. *Pearson R. G.* Chemical Hardness : Applications from Molecules to Solids. 1997. Weinheim : Wiley-VCH : Verlag GMBH, 1997. 200 p.
22. *Poleshchuk O. Kh., Yureva A. G., Filimonov V. D., Frenking G.* // J. Mol. Struct. : THEOCHEM. 2009. Vol. 912. P. 67—72.
23. *Saha S., Roy R. K., Ayers P. W.* // Int. J. Quant. Chem. 2009. Vol. 109, № 9. P. 1790—1806.
24. *Serguchev Yu. A., Belokopytov Yu. V.* // Kinetics and Catalysis. 2001. Vol. 42, № 2. P. 174—181.
25. *Serguchev Yu.A., Belokopytov Yu.V.* // Kinetics and Catalysis. 2001. Vol. 42, № 2. P. 195—203.
26. *Sheldon R. A., Arends J., Hanefeld U.* Green Chemistry and Catalysis. Weinheim : Wiley-VCH : Verlag GmbH, 2007. 447 p.
27. Theoretical Aspects of Chemical Reactivity / ed. by A. Toro-Labbe. Amsterdam : Elsevier, 2007. 322 p.
28. *Tsuji J.* Palladium Reagents and Catalysis : New Perspectives for the 21th Century. Chichester : Wiley and Sons, 2004. 670 p.
29. *Valiev M., Bylaska E. J., Govind N., Kowalski K., Straatsma T. P., Van Dam H. J. J., Wang D., Nieplocha J., Apra E., Windus T. L., de Jong W. A.* // Comput. Phys. Commun. 2010. Vol. 181. P. 1477—1489.
30. *Yung D. C.* Computational Chemistry. New York : J. Wiley & Sons Inc., 2001. 380 p.
31. *Zhao Y., Truhlar D. G.* // Theor. Chem. Acc. 2008. Vol. 120. P. 215—241.

УДК 547.466

Л. В. Курицын

К КИНЕТИКЕ ЭЛЕКТРОФИЛЬНОГО ЗАМЕЩЕНИЯ В АРОМАТИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЯХ

Обсуждается один из способов расчета констант скорости образования изомеров продуктов реакции электрофильного замещения в ароматических соединениях на основе экспериментальных данных — позиционной селективности и субстратной реакционной способности на примере электрофильного замещения в монозамещенных бензолах.

Ключевые слова: кинетика, электрофильное замещение, ароматические соединения, изомеры, позиционная селективность.

One of the methods of aromatic compounds electrophilic substitution reaction products' isomers formation rate constants calculation on the base of experimental data — positional selectivity and substrate reactivity on the example of electrophilic substitution in monosubstituted benzenes is discussed in the article.

Key words: kinetics, electrophylic substitution, aromatic compounds, isomers, positional selectivity.

Реакциям электрофильного замещения (сульфирование, нитрование, бромирование и др.) ароматических соединений посвящена обширная литература. Основное внимание исследователей было направлено на повышение выхода продуктов реакции, что чрезвычайно важно с практической точки зрения. Реакции проводились как в гомогенных, так и в гетерогенных условиях, часто без учета влияния температуры и состава среды, что не позволяло проводить расчеты кинетических характеристик реакции.

В настоящей работе рассмотрен один из способов расчета констант скорости образования изомеров реакции электрофильного замещения в ароматических соединениях на основе экспериментальных данных — позиционной селективности и субстратной реакционной способности на примере электрофильного замещения в монозамещенных бензолах C_6H_5R, где R — CH_3-, NO_2-, Br^- и др.

Если в ходе гомогенной реакции концентрация электрофильных частиц, участвующих в реакции, постоянна и природа среды не меняется, то скорость образования пара-, мета- и орто-изомеров определяется уравнениями (1)—(3):

$$\frac{dC_{\text{ï}}}{d\tau} = k_{\text{ï}}\,(\tilde{N}^0 - \tilde{N}_x), \tag{1}$$

$$\frac{dC_{\text{ì}}}{d\tau} = k_{\text{ì}}\,(\tilde{N}^0 - \tilde{N}_x), \tag{2}$$

$$\frac{dC_{\text{î}}}{d\tau} = k_{\text{î}}\,(\tilde{N}^0 - \tilde{N}_x), \tag{3}$$

где $k_п$, $k_м$, $k_о$ — константа скорости образования п-, м- и о-изомеров, $C_п$, $C_м$, $C_о$ — концентрации изомеров, $C_x = C_п + C_м + C_о$, C^0 — начальная концентрация C_6H_5R, τ — время.

Скорость изменения C_x в ходе реакции равна

$$\frac{dC_x}{d\tau} = k_{\text{ï}}\,(\tilde{N}^0 - \tilde{N}_x), \tag{4}$$

где $k = k_п + k_м + k_о$.

Интегрируя уравнение (4), имеем

$$\tilde{N}^0 - \tilde{N}_x = C^0 e^{-k\tau}. \tag{5}$$

Подставляя $\tilde{N}^0 - \tilde{N}_x$ из уравнения (5) в уравнения (1)—(3) и интегрируя, имеем

$$\tilde{N}_{\text{ï}} = C^0 \frac{k_{\text{ï}}}{k}(1 - e^{-k\tau}), \tag{6}$$

$$\tilde{N}_{\text{ì}} = C^0 \frac{k_{\text{ì}}}{k}(1 - e^{-k\tau}), \tag{7}$$

$$\tilde{N}_{\text{î}} = C^0 \frac{k_{\text{î}}}{k}(1 - e^{-k\tau}). \tag{8}$$

Уравнения (6)—(8) могут быть преобразованы к виду

$$\frac{\alpha_{\text{ï}}}{\alpha_{\text{ï}} + \alpha_{\text{ì}} + \alpha_{\text{î}}} = \frac{k_{\text{ï}}}{k_{\text{ï}} + k_{\text{ì}} + k_{\text{î}}}, \tag{9}$$

$$\frac{\alpha_м}{\alpha_п+\alpha_м+\alpha_о}=\frac{k_м}{k_п+k_м+k_о}, \qquad (10)$$

$$\frac{\alpha_о}{\alpha_п+\alpha_м+\alpha_о}=\frac{k_о}{k_п+k_м+k_о}, \qquad (11)$$

где $\alpha_п=\frac{C_п}{C^0}$, $\alpha_м=\frac{C_м}{C^0}$, $\alpha_о=\frac{C_о}{C^0}$, $\alpha=\frac{C_x}{C^0}$, $\alpha_п+\alpha_м+\alpha_о=\alpha=1-e^{-k\tau}$.

В литературе принято обозначать левую часть уравнений через П, М, О, называя их позиционными селективностями[1]. Очевидно, что П + М + О = 1.

Необходимо обратить внимание на правую часть уравнений (9)—(11). Если за счет ингибирования или катализа константы скорости $k_п$, $k_м$, $k_о$ возрастают, например, в 10^6 раз, то и $k_п + k_м + k_о$ (знаменатель) увеличивается приблизительно в 10^6 раз. Это указывает на то, что П, М, О не могут характеризовать кинетику процесса, а следовательно и его механизм. Все попытки объяснять механизм реакций, используя П, М, О, надо признать некорректными[2].

Надо также отметить, что константы скорости образования изомеров необходимо рассматривать с позиции стехиометрических механизмов реакции, включающих ряд обратимых и необратимых стадий взаимодействия участников реакции и среды.

Любые корреляции П, М, О с какими-либо параметрами процессов или среды (σ^+, $\frac{1}{\varepsilon}$ и др.) не имеют познавательной силы (научной ценности).

По данным П, М, О можно рассчитать константы скорости образования изомеров $k_п, k_м, k_о$ и парциальные константы скорости $\bar{k}_п, \bar{k}_м, \bar{k}_о$:

$$k_п=П\cdot k,\quad k_м=М\cdot k,\quad k_о=О\cdot k,$$

$$\bar{k}_п=k_п,\quad \bar{k}_м=\frac{k_м}{2},\quad \bar{k}_о=\frac{k_о}{2},$$

а также кинетический выход изомеров в различные промежутки времени τ от начала реакции:

$$\alpha_п=П\,(1-e^{-k\tau}),\quad \alpha_м=М\,(1-e^{-k\tau}),\quad \alpha_о=О\,(1-e^{-k\tau}).$$

Учитывая слабую зависимость П, М, О от температуры, можно допустить, что значения энергий активации и изменения энтропии активации синтеза изомеров в пределах погрешности эксперимента равны

$$E_п = E_м = E_о = E,\qquad \Delta S^{\neq}_п = \Delta S^{\neq}_м = \Delta S^{\neq}_о = \Delta S^{\neq}.$$

Значения E и $\Delta S^{\neq}$ могут быть определены по температурной зависимости k. В случае гетерогенного протекания реакции электрофильного замещения в ароматических соединениях все рассуждения о механизмах реакции с использованием П, М, О также являются некорректными.

[1] *Крылов Е. Н.* // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2009. Вып. 2. С. 16—21.

[2] Там же.

УДК 536.24

М. И. Давидзон

О ЗАКОНАХ ОХЛАЖДЕНИЯ И. НЬЮТОНА И В. РИХМАНА

Рассмотрено физическое содержание законов охлаждения И. Ньютона и В. Рихмана. Показано, что закон, именуемый в англоязычной научно-технической литературе как закон охлаждения Ньютона, не является законом охлаждения ни Ньютона, ни Рихмана.

Ключевые слова: тепловой поток, коэффициент теплообмена, закон охлаждения Ньютона — Рихмана.

The physical content of I. Newton's and V. Richmann's laws of cooling are considered in the article. It is shown that the so called in English-language scientific and technical literature Newton's law of cooling in reality is neither I. Newton's nor V. Richmann's law.

Key words: heat flow, heat transfer coefficient, the Newton's — Richmann's law of cooling.

Современная теория теплообмена и инженерные расчеты теплоиспользующих устройств основаны на законе охлаждения И. Ньютона, по терминологии англоязычных и западноевропейских исследователей, и законе охлаждения Ньютона — Рихмана, по терминологии части русскоговорящих научных и инженерно-технических работников. Один и тот же закон по-разному называется в научных работах. Естественно, возникает вопрос: если это один и тот же закон, то почему его по-разному именуют на Западе и Востоке? Нами предпринята попытка разобраться в физической сущности законов охлаждения И. Ньютона и В. Рихмана.

В 1701 г. была опубликована статья И. Ньютона «Шкала степеней тепла» [6], которая, по-видимому, была его единственной работой по теплофизике. В то далекое время еще отсутствовали понятия «количество тепла», «тепловой поток», «температура» и др. Исследователи пользовались различными термометрами и температурными шкалами. Приходилось также сталкиваться с техническими трудностями согласования показаний термометров одной и той же конструкции [5]. Достойно удивления, как в этой сложной ситуации И. Ньютону удалось измерить количество тепла, отдаваемое в окружающую среду нагретым телом, и его температуру. Изящество методики Ньютона заключалось в том, что, не располагая способом измерения энергии, передаваемой путем теплообмена, Ньютон составил таблицу относительной теплоты и температур. В этой таблице при температуре человеческого тела отдача теплоты составляет 12 частей. Низшей степени теплоты «соответствует теплота, при которой вода начинает от мороза затвердевать». При кипении воды отдача теплоты составляет 33 части, при кристаллизации свинца — 96 частей и т. д. Соответственно относительная температура составляет 1; 2,5; 4 и т. д.

Собственно, эксперимент И. Ньютона заключался в том, что на раскаленный докрасна достаточно толстый чугун, равномерно обдуваемый воздухом, клались кусочки металлов или других плавящихся тел. При этом фиксировалось время, при котором при охлаждении чугуна эти кусочки отвердевали, а также время, по истечении которого температура чугуна становилась одинаковой с температурой человеческого тела.

В результате было получено, что «теплота, которую нагретое железо сообщает в заданное время смежным с ним холодным телам, т. е. теплота, которую железо затрачивает в продолжение заданного времени, пропорциональна всей теплоте железа; поэтому, если времена охлаждения принимать равными, то теплоты будут в геометрической прогрессии и могут быть легко найдены по таблице логарифмов» [6, с. 67]. Это утверждение о пропорциональности между переданным нагретым телом количеством тепла и его температурой («всей теплотой железа») составляет содержание закона охлаждения И. Ньютона. Если через U обозначить энергию, потерянную нагретым телом при охлаждении, а через τ время, то закон охлаждения Ньютона можно записать в форме

$$\frac{dU}{d\tau} = kT_W, \tag{1}$$

где k — коэффициент пропорциональности, T_W — температура тела (можно полагать, что это и температура поверхности тела).

Закон охлаждения И. Ньютона (1) по форме напоминает основной закон динамики ньютоновской механики. Последним устанавливается связь между скоростью изменения меры количества механического движения и причиной, приводящей к изменению количества движения. Если воспользоваться вторым законом И. Ньютона в скалярной форме [3], где в качестве меры количества движения принята кинетическая энергия $\frac{mv^2}{2}$, то его можно записать в виде

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = vF. \tag{2}$$

Здесь скорость движения тела обозначена символом v. F — сила.

В законах (1) и (2) скорость изменения меры соответствующей формы количества движения пропорциональна причине, приводящей к изменению количества движения. У нас нет никаких оснований полагать, что И. Ньютон пытался тепловые явления описывать подобно механическим. Тем не менее в качестве меры количества теплового движения физической системы естественно принять внутреннюю энергию частиц, составляющих систему. Причиной изменения внутренней энергии системы является тепловое взаимодействие с другими системами, приводящее к изменению температуры. Скорость изменения внутренней энергии системы должна зависеть от температуры. По закону охлаждения И. Ньютона (1) она оказалась пропорциональной температуре.

При проведении опытов И. Ньютона не интересовали изменения, происходящие в системе, воспринимающей тепло. Важно было обеспечить одни и те же условия отвода тепла во всех опытах. Влияние состояния окружающей среды не учитывалось. Иными словами, мощность источника тепла определяла процесс передачи энергии. Среда могла воспринять любое количество тепла. Меняет ли она при этом свое состояние, законом охлаждения И. Ньютона не рассматривается. Ньютона интересовала только энергия, отдаваемая нагретым телом, т. е. убыль внутренней энергии. Поэтому под символом U в законе охлаждения Ньютона (1) следует понимать внутреннюю энергию физической системы.

Обратим внимание на размерность коэффициента k в равенстве (1). Ее можно представить в виде

$$k\left[\frac{\text{Äæ}}{\text{с ãðàä}}\right].$$

По физическому смыслу — это энергия, передаваемая за одну секунду и приходящаяся на один градус. Если ввести в правую часть равенства (1) массу тела m и удельную теплоемкость C_m при постоянном объеме, то выражению (1) можно придать форму (2):

$$\frac{dU}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}(m\,C_m T_w)\,. \tag{3}$$

Если учесть, что в опытах И. Ньютона масса теплоотдающего тела практически не меняется, а удельная теплоемкость является константой, то вместо выражения (3) можно записать:

$$dU = m\,C_m\,dT_w\,. \tag{4}$$

Выражение (4), как известно из термодинамики, представляет собой способ вычисления внутренней энергии системы. При этом температура измеряется в градусах абсолютной термодинамической шкалы температур — в градусах Кельвина. Выходит, что законом охлаждения И. Ньютона установлена принципиальная для термодинамики связь между мерой количества теплового движения частиц системы (внутренней энергией) и температурой. Причем температурой особой — абсолютной. И это в то время, когда исследователи пользовались различными температурными шкалами, часто трудносопоставляемыми. Возможно, это и побудило И. Ньютона к поиску удобной температурной шкалы. К сожалению, исследователи в свое время не обратили внимание на эту особенность его работы. Только в наше время А. С. Карташов [4] указал на введение Ньютоном абсолютной температуры и попытался из закона охлаждения Ньютона получить законы термодинамики.

Выше рассмотрен «механистический» подход к закону охлаждения Ньютона. Можно попытаться рассмотреть этот закон с «термодинамической» точки зрения. Размерность коэффициента k в законе охлаждения Ньютона (1), если использовать понятие энтропии S, позволяет трактовать его как скорость изменения энтропии $\frac{dS}{d\tau}$, и тогда вместо выражения (1) можно записать:

$$\frac{dU}{d\tau}=\frac{dS}{d\tau}T_w\,. \tag{5}$$

Или, в более привычной для нас форме,

$$dU = T_w\,dS. \tag{6}$$

Если термодинамическая система закрыта (внутренняя энергия передается только путем теплообмена, без совершения работы и переноса массой), то вместо символа внутренней энергии можно записать количество тепла Q и тогда

$$dU = \delta Q = T_w\,dS. \tag{7}$$

Равенство (7) представляет собой частный случай первого и второго законов термодинамики.

Можно заключить, что закон охлаждения Ньютона в форме (1) и следствия из него в виде (4) и (7) примерно за 150 лет до окончательной формулировки законов термодинамики были «предвосхищены» Ньютоном. В практических и теоретических работах по теплообмену один из способов определения внутренней энергии физической системы до сих пор основан на выражениях типа (4).

Для И. Ньютона как физика-теоретика было характерно глубокое проникновение в суть проблемы. Его не интересовали прикладные вопросы. В законе охлаждения Ньютона не уточняются условия передачи энергии путем теплообмена. Не учитываются форма тела (величина поверхности теплообмена) и условия, при которых возможен теплообмен с окружающей средой. Важно было установить, как связана мера теплового движения физической системы (внутренняя энергия) с ее температурой. Для этого Ньютону пришлось ввести температуру, не имевшую в то время аналогов, но по своей сути выражающую абсолютную термодинамическую температуру. Интересно, что Ньютон ввел в науку понятия «абсолютное пространство», «абсолютное время», но температуру не назвал абсолютной!

Спустя примерно полвека после работы И. Ньютона (1747) в Российскую академию наук была представлена статья В. Рихмана, посвященная экспериментальным теплофизическим исследованиям. Методика проведения экспериментов Рихмана отличалась от методики Ньютона: «Я подвесил на тонком шнурке стеклянный сосуд сферической формы с узким горлышком таким образом, что он соприкасался только с воздухом, температура которого была 68°, и налил в этот сосуд кипящую воду <…> Опустив термометр в воду, я увидел, что теплота уменьшилась…» [7, с. 73]. Добавим к этому, что температура измерялась в градусах Фаренгейта и фиксировалась каждые пять минут. Опыты проведены с различными массами и начальными температурами воды. Использовались сосуды различных размеров.

Из выводов работы: «Итак, мы заключаем из опытов, что убывание теплоты <…> происходит в сложной зависимости, прямо пропорционально поверхностям и разностям между температурой охлаждаемых или нагреваемых масс и температурой воздуха и обратно пропорционально объемам нагреваемых или охлаждаемых масс, при условии, что промежутки времени равны друг другу и невелики. Утвердив это положение, мы способны будем обосновать закон, согласно которому можно будет предсказать убывание или возрастание теплоты за любой промежуток времени, *при постоянной температуре воздуха*» [7, с. 80] (курсив мой. — *М. Д.*).

К сожалению, трагическая смерть помешала В. Рихману записать закон в окончательном виде. Как следует из закона охлаждения Рихмана, чем больше поверхность теплообмена f, тем больше поток передаваемой энергии U. По его наблюдениям, отдаваемая в окружающую среду нагретым телом энергия зависит не только от температуры нагретого тела T_w (как в законе охлаждения Ньютона), но и от температуры окружающей среды T_∞. Количественно это можно записать в виде

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{k_2}{V} f(T_w - T_\infty) = \alpha f(T_w - T_\infty), \tag{8}$$

где k_2 — коэффициент пропорциональности, V — объем охлаждаемого тела. В настоящее время этот закон принято записывать в форме

$$q = \frac{dU}{d\tau f} = \alpha(T_w - T_\infty). \tag{9}$$

Здесь q — поверхностная плотность теплового потока, α — эмпирический коэффициент, именуемый коэффициентом теплообмена.

В выражении закона охлаждения В. Рихмана впервые появилась разность температур тела T_w и окружающей среды T_∞. По существу, это предвосхищение второго закона термодинамики, согласно которому самопроизвольная передача тепла осуществляется от тела более нагретого к телу менее нагретому.

В теории и практике конвективного теплообмена используется выражение, по написанию не отличающееся от закона (9) В. Рихмана. Но под температурой T_∞ понимается средняя, среднемассовая или начальная по сечению канала температура. Именно в таком понимании закон охлаждения в форме (9) в англоязычной и западноевропейской научно-технической литературе именуют законом охлаждения И. Ньютона, а в русскоязычной литературе — законом охлаждения Ньютона — Рихмана.

Используемый в форме (9) закон охлаждения В. Рихмана становится приближенным. В опытах Рихмана энергия, переданная в окружающую среду, определялась по убыли энергии нагретого тела, т. е. по убыли внутренней энергии. Если полагать, что температура окружающей среды T_∞ — это та температура, которую приобретает теплоотдающее тело, то можно полагать, что $\alpha(T_w - T_\infty)$ — это изменение внутренней энергии теплоотдающего тела, отнесенное к одному квадратному метру поверхности теплообмена, и вся эта энергия передается исключительно путем теплообмена. Такое утверждение справедливо, если температура измеряется по абсолютной термодинамической шкале температур, т. е. в градусах Кельвина. В опытах В. Рихмана температура определялась по шкале Фаренгейта. Это свидетельствует о том, что коэффициент α, именуемый коэффициентом теплообмена, зависит от используемой в экспериментах температурной шкалы (насколько градус этой шкалы близок к градусу Кельвина).

В выражении (9) изменение внутренней энергии отнесено к единице поверхности теплообмена. В рамках одной и той же поверхности теплообмена может быть сосредоточена и большая и малая внутренняя энергия. Кривизна поверхности может повлиять на теплообмен, т. е. коэффициент α будет функцией кривизны поверхности (характерного, масштабного, определяющего размера системы).

Правая часть закона В. Рихмана (9) отражает убыль внутренней энергии охлаждаемого тела, отнесенной к единице теплообменной поверхности. Левую часть уравнения можно трактовать и как интенсивность передачи энергии путем теплообмена в системе, воспринимающей тепло. Но, как следует из первого закона термодинамики, внутренняя энергия может передаваться не только путем теплообмена. Она может затрачиваться на совершение работы. В рассматриваемом случае работа затрачивается на перемещение масс воздуха — конвекцию. Как следует из выражения (2), работа выражается произведением скорости на силу. Это свидетельствует о том, что коэффициент теплообмена должен зависеть от скорости распространения энергии в тепловоспринимающей системе. В термодинамике вместо силы используют давление. Тогда получается, что коэффициент теплообмена должен зависеть еще и от давления в среде и величины поверхности. Закон охлаждения В. Рихмана (9) становится приближенным, т. к. плотность теплового потока от охлаждаемого тела в окружающую среду определяется не только свойствами охлаждаемого тела, но и состоянием среды в данный момент времени. В некоторых случаях конвективный теплообмен определяет интенсивность процесса. В законе Рихмана это никак не отражено. Можно заключить, что закон охлаждения Рихмана (9) является приближенным уравнением для описания теплообмена. В одних случаях он может выполняться с приемлемой точностью, а в других он неприменим. На это обращено внимание в работах [2, 9] исходя из интуитивных соображений.

О приближенности закона охлаждения (модели) В. Рихмана свидетельствует неучет способа передачи тепла окружающей среде (теплопроводность, конвекция). В то время представления о способах передачи тепла отсутствовали. Поэтому мы не должны удивляться тому, что это обстоятельство не учтено в законе охлаждения В. Рихмана.

Если из выражения (9) найти коэффициент теплообмена α, то нетрудно заметить, что последняя величина становится неоднозначной, ибо приводится к одному градусу температуры. Внутренняя энергия теплопередающей системы при превращении в количество тепла Q тепловоспринимающей системы зависит от вида процесса перехода (изобарный, изохорный и т. п.). Изменение внутренней энергии на один градус в зависимости от процесса передачи тепла приводит к различным значениям величины коэффициента теплообмена. Коэффициент теплообмена, вычисленный по внутренней энергии, может не совпадать с его численным значением по полученному количеству тепла. Зависит коэффициент теплообмена и от многих других величин.

При передаче тепла теплопроводностью наблюдатель в тепловоспринимающей системе вправе записать:

$$dq = \frac{\partial q}{\partial \nabla \grave{O}} \mathrm{d}\nabla\mathrm{T}, \tag{10}$$

где $\nabla\mathrm{T}$ — градиент температуры.

Если принять, что частная производная от плотности теплового потока по градиенту температуры в процессе теплообмена не меняется, т. е.

$$\frac{\partial q}{\partial \nabla \grave{O}} = k_3, \qquad (11)$$

то, решая уравнение (10) с учетом (11) при условии отсутствия передачи тепла, когда нет градиента температуры, придем к закону Ж. Фурье (12)

$$q = k_3 \Delta T = k_3 \frac{dT}{dr}. \qquad (12)$$

Приравнивая выражения (9) и (12), нетрудно заключить, что в стационарных условиях при отводе тепла теплопроводностью коэффициент теплообмена α зависит от теплопроводности среды k_3.

Если отвод тепла осуществляется только конвекцией, то наблюдатель в теплоотводящей системе вправе записать, что плотность потока тепла является функцией скорости. И тогда, рассуждая как и при выводе соотношения (12), вместо градиента температуры следует писать скорость движения среды v.

Учитывая это, можно записать выражение так:

$$q = C_m \rho T v = \alpha (T_w - T_\infty). \qquad (13)$$

В условиях стационарного теплообмена, как следует из выражения (13), коэффициент теплообмена зависит от теплоемкости, плотности среды, воспринимающей тепло, ее температуры и скорости движения.

Эксперименты, выполненные исследователями различных стран в XIX и особенно в XX в., показали, что действительно коэффициент теплообмена α зависит от многих параметров [1, 8]. В начале XIX в. подвергалась сомнению также линейная зависимость от разности температур и поверхности теплообмена. Предлагались степенные зависимости: для разности температур показатель степени принимался от единицы до двух, а для поверхности изредка принималось значение, отличное от единицы [1]. Постепенно пришли к выводу, что трудности при решении задач теплоотдачи сосредоточены в вопросе о выборе значения α. Коэффициент теплообмена предлагалось представлять в виде степенной функции от скорости с показателем степени от нуля до единицы. Влияние окружающей среды учитывалось терминологией — «коэффициент теплоотдачи от воды ко льду, от воды к латуни, от каменной кладки к воздуху» и т. д. В XX в. стали экспериментально изучать зависимость коэффициента теплообмена от формы поверхности (плита, труба и т. д.) и ее ориентации в пространстве. После работы В. Нуссельта по теплообмену (1910) результаты экспериментов по определению коэффициента теплообмена стали представлять в виде безразмерных критериев подобия. Выяснилось, что α зависит не только от разности температур стенки и среды, но и от температуры стенки и среды в отдельности.

Коэффициент теплообмена α не является физической величиной и теоретические расчеты этой величины, похоже, до сих пор не увенчались успехом.

Теоретические и практические расчеты теплоиспользующих устройств достаточно сложны. Требуется решение системы дифференциальных уравнений в частных производных. Решения получены для весьма ограниченного числа задач. Возможно, поэтому в основе современных расчетов теплообменных устройств и теории теплообмена все еще используется закон, по виду напоминающий закон охлаждения В. Рихмана. В теоретических построениях путем решения дифференциальных уравнений в качестве граничного условия используется выражение типа (9) и на его основе предпринимаются попытки определить коэффициент теплообмена α. В практических расчетах теплообмена используют экспериментально найденные из переосмысленного закона охлаждения В. Рихмана (9) значения коэффициента теплообмена α в конкретных условиях. Для пересчета в соответствии с отличающимися условиями используют теорию подобия. Экспериментальные данные обобщают в виде безразмерных критериальных комплексов. Обратим внимание, что и теория, и эксперименты направлены на определение исключительно коэффициента теплообмена α!

Конструктора теплоиспользующих устройств интересует прежде всего распределение температур и скоростей вдоль поверхности теплообмена. Не является ли более разумным поиск уравнений и соотношений, выражающих непосредственную связь конечных и начально задаваемых величин, вместо определения значений некоторой величины, именуемой коэффициентом теплообмена α?

В работе И. Ньютона [6, с. 68] обращается внимание на то, что «если времена охлаждения принимать равными, то теплоты будут в геометрической прогрессии и могут быть легко найдены по таблице логарифмов». Иными словами, температура охлаждения тела во времени подчиняется экспоненциальному закону. На основании своих наблюдений В. Рихман также пришел к подобному выводу. Возможно, именно по этой причине полагают, что законы охлаждения И. Ньютона и В. Рихмана — это один и тот же закон. Попытаемся показать, что это не так.

В процессе теплового взаимодействия участвуют две физические системы: одна отдает тепло, другая его воспринимает. Поверхностную плотность потока тепла можно описать через параметры одной и другой системы. Наблюдатель в теплоотдающей системе, следуя закону охлаждения Рихмана, запишет, что поверхностная плотность потока определяется выражением (9). Наблюдатель в тепловоспринимающей системе может рассуждать примерно следующим образом. Плотность теплового потока q в начальный момент времени τ будет равна некоторой величине q_0. С течением времени плотность теплового потока уменьшается и, спустя некоторый промежуток времени (формально $\tau \to \infty$), уменьшается до нуля — $q \to 0$. С его точки зрения, $q = q(\tau)$. Приращение плотности теплового потока равно

$$dq = -\frac{\partial q}{\partial \tau} d\tau . \qquad (14)$$

Необходимо из экспериментов или каких-то соображений знать частную производную от плотности теплового потока по времени. В простейшем случае, если принять производную постоянной и равной k_4, то решением дифференциального уравнения (14) при начальном условии $\tau = 0$, $q = q_0$ будет выражение

$$q = q_0 - k_4 \tau . \qquad (15)$$

Полученное решение (15) противоречит условию, согласно которому при $\tau \to \infty$ плотность теплового потока должна стремиться к нулю: $q \to 0$.

Если частную производную от плотности теплового потока по времени принять не постоянной, а подчиняющейся экспоненциальной зависимости, то нетрудно обнаружить, что в этом случае плотность теплового потока наблюдателем в тепловоспринимающей системе может быть записана в виде выражения

$$q = q_0 e^{-\beta\tau}. \tag{16}$$

Здесь β — некоторая постоянная, необходимая для соблюдения размерности. Равенство (16) не противоречит физике явления, начальному условию и значению плотности теплового потока при времени, стремящемся к бесконечности.

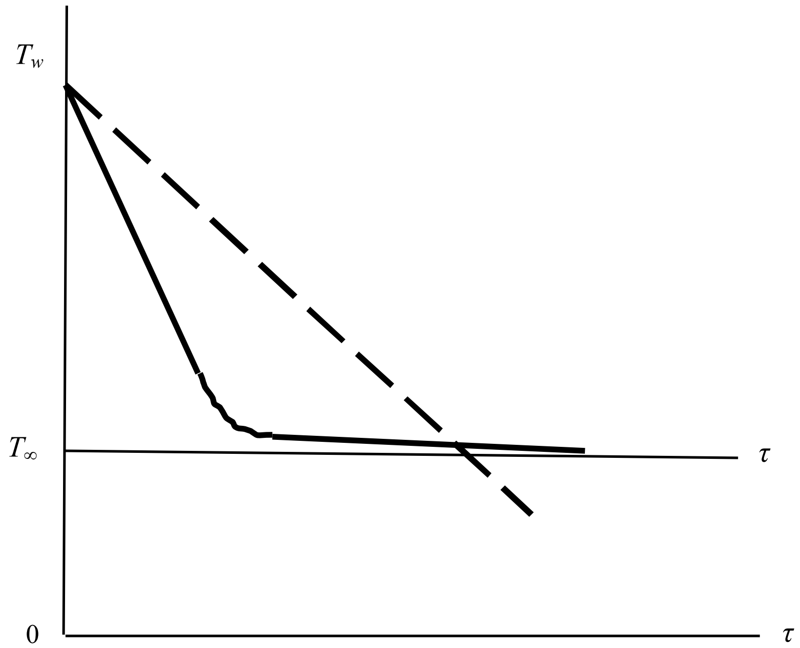
Остается приравнять выражения (9) и (16). В результате придем к зависимости

$$T_w - T_\infty = \frac{q_0}{\alpha} e^{-\beta\tau} \tag{17}$$

или

$$T_w = T_\infty + \frac{q_0}{\alpha} e^{-\beta\tau}. \tag{18}$$

На рисунке (сплошная линия) представлено изменение температуры тела со временем по выражению (18). По оси ординат отложена температура тела (его поверхности) T_w, а по оси абсцисс — время τ. Температура тела убывает от некоторого начального значения в момент времени, равный нулю, и асимптотически стремится к температуре окружающей среды T_∞.



Изменение температуры тела со временем по закону охлаждения В. Рихмана (18) (сплошная линия) и закону охлаждения И. Ньютона (прерывистая линия)

В закон охлаждения И. Ньютона (1) поверхность теплообмена не входит. Однако из описания методики экспериментов Ньютона следует, что в процессе экспериментов она практически не меняется. Если левую и правую часть равенства (1) поделить на величину поверхности теплообмена, то слева получим плотность теплового потока q, а справа ту же линейную функцию, но с новым значением постоянной. Вместо коэффициента пропорциональности k появится k_5. Закон охлаждения И. Ньютона (1) в этом случае можно представить в форме

$$q = k_5 T_w. \tag{19}$$

Наблюдатель в теплоотдающей системе плотность теплового потока вправе рассчитывать по зависимости (19). Наблюдатель в тепловоспринимающей системе для расчета плотности теплового потока, как и в предыдущем случае, может воспользоваться выражением (16). Приравнивая равенства (17) и (19), нетрудно обнаружить, что температура тела будет изменяться по экспоненциальному закону

$$T_w = \frac{q_0}{k_5} e^{-\beta\tau}. \tag{20}$$

Графически выражение (20) представлено на рисунке прерывистой линией. Температура убывает от некоторого начального значения при времени $\tau = 0$ и асимптотически стремится к нулевому значению абсолютной температуры.

Сравнивая на рисунке кривые, нетрудно заметить следующее: несмотря на то что и по закону охлаждения В. Рихмана, и по закону охлаждения И. Ньютона температура тела убывает экспоненциально, это разные законы. Скорости уменьшения температуры различны. К такому выводу можно прийти, если обратить внимание на постоянную β в уравнениях (19) и (20). Размерность ее обратна времени. По физическому смыслу это величина, обратная времени релаксации, т. е. времени, необходимому, чтобы система, будучи выведенной из равновесия, вернулась в равновесное состояние. Если доведенный до кипения чай в стакане оставить в помещении, то, чтобы ему прийти в состояние, равновесное с температурой комнаты, потребуется примерно четыре часа. В уравнении (16) β по порядку величины равна единице, деленной на четыре часа (но в секундах). В выражении (20) β обратна времени релаксации при охлаждении чая от температуры кипения до нуля по шкале, найденной И. Ньютоном, или (что то же самое) по абсолютной термодинамической шкале. Ясно, что в этом случае время релаксации существенно увеличится, процесс охлаждения сильно замедлится.

Из изложенного выше можно заключить, что по физическому содержанию закон охлаждения И. Ньютона отличается от закона охлаждения В. Рихмана. И если исходить из формулировок законов охлаждения, предложенных самими авторами, то нет оснований называть их законом охлаждения Ньютона или законом охлаждения Ньютона — Рихмана. Более того, использование при расчетах теплообмена вместо равновесной температуры T_∞ некоторой средней лишает исследователей оснований называть выражение (9) именами И. Ньютона и В. Рихмана.

Библиографический список

1. *Гребер Г., Эрк С.* Основы учения о теплообмене. М. ; Л. : Объединенное науч.-техн. изд-во НКТП СССР, 1936. 327 с.
2. *Давидзон М. И.* О законе охлаждения Ньютона — Рихмана // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2010. Вып. 2. С. 70—75.
3. *Давидзон М. И.* Основы механики. М. : Гардарики, 2004. 314 с.
4. *Карташов А. С.* Термодинамические часы Исаака Ньютона. URL: http://samlib.ru/k/kartashow_ a_s/g5 newton.shtml (дата обращения: 05.12.2012).
5. *Лауэ М.* История физики. М. : ГИТТЛ, 1956. 230 с.
6. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии ; Оптика ; Оптические лекции : (избр. места). Л. : Изд-во П. П. Сойкина, 1929. 71 с.
7. *Рихман В.* Труды по физике. М. : Изд-во АН СССР, 1956. 711 с.
8. *Шак А.* Промышленная теплопередача. М. : Гос. науч.-техн. изд-во лит. по черн. и цв. металлургии, 1961. 542 с.
9. *Davidzon M. I.* The Newton law of cooling and its interpretation // International J. of Heat and Mass Transfer. 2012. Vol. 55. P. 5397—5402.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.5

Д. И. Молдаванский

40 ЛЕТ НАУЧНОЙ ЛОГИКО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ШКОЛЕ ИвГУ: ИТОГИ И ПЕРСПЕКТИВЫ

В основу статьи положен доклад о результатах научных исследований, проводившихся кафедрой алгебры и математической логики Ивановского государственного университета, прочитанный на пленарном заседании научной конференции ИвГУ 28 января 2014 г.

Ключевые слова: алгебра, алгоритм, комбинаторная теория групп, аппроксимационные свойства групп.

The article is based on the report about the research results held by the Department of algebra and mathematical logic of Ivanovo State University, made at a plenary meeting of scientific conference of IvSU on 28 January, 2014.

Key words: algebra, algorithm, combinatorial group theory, residual properties of groups.

Два предварительных замечания: 1) научные исследования в области алгебры и математической логики на нашем факультете начались еще в педагогическом институте, и рассказ об их современном состоянии естественно вести с истоков; 2) результаты научной работы в области теоретической математики выражаются в виде формулировок новых (т. е. ранее неизвестных) теорем. Формулировок я приводить не буду, но все-таки надеюсь дать некоторое представление о предмете наших исследований, стараясь по возможности избегать употребления совсем уж специальных терминов.

Современная алгебра и математическая логика являются сравнительно молодыми разделами математики. Несмотря на то что истоки алгебры восходят ко временам глубокой древности, где она создавалась как наука о решении уравнений, современный взгляд на предмет ее изучения сформировался лишь к концу XIX в., благодаря главным образом трудам французских математиков Ж. Л. Лагранжа и Э. Галуа. Предмет изучения современной алгебры — алгебраические системы, т. е. множества произвольной природы, рассматриваемые вместе с некоторым набором определенных на них операций. Хорошо знакомый всем пример алгебраической системы — множество целых чисел с операциями сложения и умножения.

Еще более молодым является раздел математической логики, называемый теорией алгоритмов. Интуитивным представлением о том, что такое алгоритм, владеет каждый, кто учился в школе. Алгоритмом мы считаем систему инструкций, предназначенную для решения бесконечной серии однотипных задач. Простейшие примеры известных всем алгоритмов — правила сложения и умножения натуральных чисел, заданных их десятичной записью.

Тем не менее для некоторых математических проблем, допускающих алгоритмическую формулировку, многолетние поиски соответствующих алгоритмов оказались безуспешными, и в начале XX в. в математическом сообществе начала формироваться гипотеза о том, что для решения ряда алгоритмических проблем алгоритмов не существует. Рассмотрение этой гипотезы потребовало строгого математического определения понятия алгоритма в отличие от приведенного выше содержательного описания этого понятия. Для решения того, является ли алгоритмом предлагаемая система инструкций, достаточно интуитивного представления об алгоритме, но для доказательства невозможности существования некоторого математического объекта необходимо располагать его точным определением. В первой половине прошлого столетия советским математиком А. А. Марковым, англичанином А. Тьюрингом и американцем А. Черчем были предложены определения алгоритма, формулировки которых основывались на разных подходах и выглядели по-разному. Однако вскоре было доказано, что эти определения равносильны, и это послужило существенным аргументом для принятия так называемого тезиса Черча об адекватности данных определений интуитивному представлению об алгоритме. Это позволило доказать алгоритмическую неразрешимость ряда математических проблем и положило начало математической теории алгоритмов, весьма содержательному и интенсивно развиваемому разделу математической логики.

Одной из основных алгебраических систем является система, называемая группой. Группа — это множество с одной двухместной операцией, обладающей некоторыми естественными свойствами. Простейший и наглядный пример — множество самосовмещений квадрата. Такими самосовмещениями являются повороты его вокруг центра (т. е. точки пересечения диагоналей) на угол, кратный 90 градусам, и зеркальные отражения относительно осей симметрии. На этом множестве можно определить операцию умножения, а именно: произведением двух самосовмещений называется результат их последовательного выполнения. Множество самосовмещений с этой операцией и есть группа.

Понятие группы, возникшее в работах Лагранжа и Галуа, привело к развитию весьма глубокой и содержательной теории. Сначала в теории групп рассматривались лишь конечные группы (т. е. состоящие из конечного числа элементов). Однако к началу XX в. стало понятно, что, с одной стороны, доказательства многих утверждений о группах не используют предположений об их конечности, а с другой — в различных областях математики наряду с конечными группами встречаются (возможно, даже чаще) и бесконечные группы. Интенсивное развитие теории бесконечных групп в нашей стране было инициировано О. Ю. Шмидтом. Имя этого замечательного ученого, несомненно, знакомо всем присутствующим, но, возможно, далеко не каждый знает, что он начинал свою научную карьеру как математик, работающий в области теории групп. Написанная им и изданная в 1916 г. книга «Абстрактная теория групп» была первой в мире публикацией, где теория групп излагалась без предположений об их конечности. В 1929 г. О. Ю. Шмидт возглавил созданную им в Московском университете кафедру высшей алгебры и организовал работу руководимого им алгебраического семинара, служившего своеобразной Меккой для алгебраистов страны и продолжающего работать в настоящее время. У меня нет точных свидетельств, но я уверен, что участником этого семинара в студенческие и аспирантские годы был и А. И. Мальцев. Во всяком случае, тематика кандидатской диссертации, защищенной им в 1937 г., относилась к теории групп.

В 1931 г., после окончания математического факультета Московского университета, А. И. Мальцев переехал в Иваново и в течение почти тридцати лет (до отъезда в 1960 г. в Новосибирский академгородок) работал в Ивановском педагогическом институте сначала ассистентом, затем доцентом и профессором, заведуя созданной им кафедрой высшей алгебры. Здесь он осуществлял интенсивную и плодотворную педагогическую деятельность, сочетая ее с большой и весьма успешной научно-исследовательской работой в области алгебры и математической логики, воспитал большую группу математиков, получившую неофициальное название Ивановской алгебраической школы.

После отъезда Анатолия Ивановича в Новосибирск на кафедре алгебры остались работать его ученики Д. М. Смирнов и Е. А. Халезов. Кафедру алгебры возглавил Д. А. Захаров, которого также можно считать учеником А. И. Мальцева, хотя кандидатскую диссертацию он написал не по алгебре и математической логике, а по топологии под руководством В. А. Ефремовича. В том же 1960 г. по приглашению А. И. Мальцева к работе на кафедре приступил М. Д. Гриндлингер, за два года до этого приехавший в СССР из США, где он был учеником и сотрудником В. Магнуса, немецкого и американского математика, одного из создателей значительного раздела современной теории групп, называемого теперь комбинаторной теорией групп.

В этот период научно-исследовательскую работу на кафедре проводили названные выше специалисты и их аспиранты: Е. А. Поляков, аспирант Д. А. Захарова, и А. И. Черемисин, аспирант Д. М. Смирнова. Аспирантом кафедры был и И. А. Лавров. Его научным руководителем являлся А. И. Мальцев, и потому Игорь Андреевич все время аспирантской подготовки провел в Новосибирске. На кафедру он вернулся в 1963 г. после защиты кандидатской диссертации и проработал здесь до 1966 г., т. е. до перехода в Новосибирский академгородок. Несколько ранее в Новосибирск переехали Д. М. Смирнов и Д. А. Захаров.

К этому времени на кафедре сложились следующие направления научно-исследовательской работы: алгебры рекурсивных функций (раздел математической логики и теории алгоритмов, изучение которого началась с основополагающей статьи А. И. Мальцева «Конструктивные алгебры», 1961 г.), теория колец и комбинаторная теория групп. После переезда в Новосибирск Д. М. Смирнова и Д. А. Захарова эти направления возглавлялись Е. А. Поляковым и А. И. Черемисиным, уже ставшими кандидатами наук, а также М. Д. Гриндлингером. На кафедре проходила подготовку большая группа аспирантов. В нее входили, в частности, А. И. Щеглов (руководитель Е. А. Поляков), автор этих строк и В. В. Солдатова (руководитель М. Д. Гриндлингер). Результаты исследований с подробными доказательствами докладывались на заседаниях кафедрального семинара, после чего направлялись в журналы разного уровня.

В то время в нашей стране развитию фундаментальных исследований в математике и расширению их географии придавалось большое значение. Стремление способствовать такому расширению научно-исследовательской работы в области алгебры и математической логики привело А. Г. Куроша и А. И. Мальцева к идее систематического проведения всесоюзных алгебраических конференций. Первые две (тогда они назывались алгебраическими коллоквиумами) состоялись в Москве в феврале 1958 г. и в апреле 1959 г., их участниками были А. И. Мальцев и Д. М. Смирнов. Последующие конференции проходили в различных городах Советского Союза (Киев, Кишинев, Минск, Новосибирск, Свердловск, Рига и др.), и практически в каждой из них принимали участие ивановские математики, причем зачастую ивановская делегация была одной из наиболее многочисленных. Наряду с преподавателями факультета в нее входили аспиранты, также выступавшие с сообщениями о своих научных результатах, а иногда и студенты.

Научно-исследовательская работа студентов всегда была в центре внимания нашей кафедры. Мы считаем, что опыт совместной с научным руководителем работы, направленной на изучение некоторого современного раздела математики (излагаемого в статьях, а не в учебниках) и получение, пусть небольшого, нового результата, должен входить в подготовку каждого специалиста-математика. Только на этом пути можно решать задачу подготовки молодых научных кадров, преемственности научных исследований. Еще в педагогическом институте части студентов, преуспевших в такой работе, государственный экзамен по математике заменялся защитой диплома (напомню, что учебные планы пединститутов не предусматривали такой формы завершения подготовки). Переход института в статус университета привел, разумеется, к большим возможностям организации научно-исследовательской работы студентов. Читавшиеся ранее на общественных началах и посещаемые лишь заинтересованными студентами специальные курсы по современному состоянию научных направлений, разрабатываемых на кафедре, вошли в учебные планы и стали обязательными для студентов, проходящих специализацию на кафедре. Обязательной стала и защита выпускной дипломной работы, и это в большей степени способствовало отбору для поступления в аспирантуру студентов, проявивших способности и желание заниматься научной деятельностью в области теоретической математики. Новые возможности в подготовке молодых научных кадров появились в 1993 г. с началом работы на факультете магистратуры. Все студенты, поступавшие в аспирантуру кафедры в течение последних 20 лет, прошли магистерскую подготовку.

Все выпускники аспирантуры нашей кафедры защитили кандидатские диссертации. Перечислю некоторых из них, начиная с пединститутских выпусков. А. П. Горюшкин, первый мой аспирант, вот уже около 40 лет работает в Петропавловске-Камчатском, занимая разные должности — от доцента и профессора до заведующего кафедрой и проректора по научной работе. Б. Я. Солон, аспирант Е. А. Полякова, доктор физико-математических наук, специалист по математической логике и теории алгоритмов, недавно вернулся в наш вуз, став деканом факультета и заведующим кафедрой алгебры и математической логики. Его однокурсник, Л. М. Шнеерсон, мой аспирант, — профессор Нью-Йоркского университета. С. Д. Бродский, мой аспирант, работает в США. Его однокурсник, тоже мой аспирант, В. Н. Егоров — ректор нашего университета. Е. Д. Логинова (аспирант В. Н. Егорова) — доцент нашей кафедры. Мои аспиранты: Д. Тьеджо, гражданин Камеруна; Д. Н. Азаров — доцент нашей кафедры, в настоящее время старший научный сотрудник; Е. В. Соколов — заведующий кафедрой вычислительной и прикладной математики; Е. А. Иванова, более 15 лет проработавшая в должности ассистента, старшего преподавателя, доцента нашей кафедры. А. В. Розов, аспирант Д. Н. Азарова, — старший преподаватель кафедры вычислительной и прикладной математики.

Начиная с 80-х гг. прошлого столетия основным направлением научно-исследовательской работы кафедры постепенно становится раздел современной комбинаторной теории групп, в котором изучаются свойства финитной аппроксимируемости групп и ее обобщений применительно к свободным конструкциям групп.

Как утверждают американские математики Б. Чандлер и В. Магнус в книге «Развитие комбинаторной теории групп» (1982 г., русский перевод — 1985 г.), понятие финитно аппроксимируемой группы впервые в явном виде возникло в статье А. И. Мальцева 1940 г. (приведенное выше название для этого понятия появилось позднее). Здесь были доказаны две важные теоремы о финитно аппроксимируемых группах. В последующих статьях 1949 и 1958 гг. А. И. Мальцев возвращается к этому понятию, доказывая ряд теорем о финитно аппроксимируемых группах и о некоторых обобщениях данного свойства групп и устанавливая связь между этими свойствами и алгоритмической разрешимостью соответствующих теоретико-групповых проблем. (Отмечу, что статья 1958 г. была напечатана в выпуске «Ученых записок» Ивановского педагогического института.) Тогда же ряд весьма интересных и важных результатов в этом направлении получил и Д. М. Смирнов. Результаты А. И. Мальцева и Д. М. Смирнова являются основополагающими в данном разделе теории групп и цитируются практически в каждой работе по этой проблематике наших и зарубежных авторов.

Важную роль в теории групп играют групповые конструкции, т. е. способы построения из нескольких заданных групп новой группы. Возникает следующий естественный вопрос: будет ли группа, построенная из групп с некоторым свойством, тоже иметь это свойство? Ответ зависит от свойства и от рассматриваемой конструкции, и упомянутое выше направление наших исследований состоит в изучении этого вопроса для свойств финитной аппроксимируемости и ее обобщений и так называемых свободных конструкций групп.

Вот уже более полувека эта проблематика с разной степенью интенсивности изучается в нашей стране и за рубежом. Заметными центрами таких исследований являются некоторые университеты Англии, Австралии, США и Канады. В нашей стране такие исследования проводились и проводятся главным образом в Ивановском университете и в Новосибирском академгородке.

Можно с полным основанием утверждать, что научный уровень и значимость результатов, полученных членами нашего коллектива, не уступают мировому. Они публикуются в ряде ведущих математических журналов, изданиях Ивановского университета, в частности в «Вестнике ИвГУ». По результатам исследований защищены 8 кандидатских диссертаций и одна докторская. Приятно отметить, что во время защит членами совета неоднократно отмечалась традиционность их проблематики для Ивановского университета. Несмотря на некоторые перемены в кадровом составе кафедры, исследовательская работа в указанном направлении продолжается и будет продолжаться, причем теперь в ней участвуют и члены других кафедр.

После некоторого перерыва, возникшего ввиду отсутствия подходящих кандидатур, на кафедре возобновилась подготовка аспирантов. К работе по научному руководству аспирантами приступил и весьма преуспел в этом Д. Н. Азаров. Его аспирант А. В. Розов в декабре 2013 г. блестяще защитил кандидатскую диссертацию. Причем эта защита состоялась всего через два месяца после окончания аспирантуры — событие для нашей кафедры беспрецедентное.

Д. Н. Азаров, несомненно, является ведущим научным работником нашей кафедры. В настоящее время, будучи в должности старшего научного сотрудника, он опубликовал ряд статей в важнейших научных журналах и занимается подготовкой докторской диссертации. При этом успевает руководить научно-исследовательской работой студентов и аспирантов.

Таким образом, имеются достаточные основания утверждать, что научно-исследовательская деятельность в области комбинаторной теории групп на нашем факультете будет успешно продолжаться.

В 70-х гг. прошлого века, желая отразить все направления выполняемой научно-исследовательской работы, мы переименовали кафедру высшей алгебры, назвав ее кафедрой алгебры и математической логики. Со временем по разным причинам вторая часть названия стала отражать лишь существование прикрепленной к кафедре соответствующей учебной дисциплины. Теперь, с приходом на кафедру Б. Я. Солона, у нас, несомненно, возобновится научно-исследовательская работа по математической логике и теории алгоритмов.

УДК 512.543

Д. Н. Азаров

О ПОЧТИ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ *p*-ГРУППАМИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГРУПП И СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Сделан обзор основных результатов о почти аппроксимируемости конечными p-группами некоторых классов групп и свободных конструкций.

Ключевые слова: свободное произведение с объединенной подгруппой, HNN-расширение, почти аппроксимируемость конечными p-группами.

A survey of the main results on the virtual residual p-finiteness of certain classes of groups and free constructions.

Key words: free product with amalgamated subgroups, HNN-extension, virtually residually a finite p-group.

Пусть K — некоторый класс групп. Группа G называется аппроксимируемой группами из класса K (или, короче, K-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы

G на некоторую группу из класса K, при котором образ элемента a отличен от 1. Группа G называется почти аппроксимируемой классом K, если она содержит K-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Обозначим через F и F_p соответственно класс всех конечных групп и класс всех конечных p-групп. Тогда понятие F-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости, которое введено А. И. Мальцевым в 1940 г. в статье «О представлении бесконечных групп матрицами» [13]. Термин «аппроксимируемость» появился в другой статье Мальцева в 1949 г. [14]. На английском языке он введен Ф. Холлом в 1955 г.

А. И. Мальцев [13] доказал F-аппроксимируемость конечно порожденных линейных групп. Следствиями этого результата являются теорема Гирша о F-аппроксимируемости полициклических групп [28] и хорошо известная теорема Ивасавы о F_p-аппроксимируемости свободных групп. Мальцевым [11] также доказана финитная аппроксимируемость для расщепляемого расширения конечно порожденной F-аппроксимируемой группы с помощью F-аппроксимируемой группы.

Д. М. Смирнов и Г. Баумслаг независимо друг от друга доказали, что группа автоморфизмов конечно порожденной F-аппроксимируемой группы сама является F-аппроксимируемой [20, 23].

Все перечисленные результаты и большинство других известных результатов о финитной аппроксимируемости не могут быть распространены на F_p-аппроксимируемость. Например, полициклическая группа финитно аппроксимируема, но она не обязана быть F_p-аппроксимируемой, даже если в ней отсутствует кручение. Тем не менее любая полициклическая группа почти F_p-аппроксимируема для каждого простого p. Этот, ставший уже классическим, результат был доказан А. Л. Шмелькиным [21].

В дальнейшем результат Шмелькина был в том или ином виде распространен на другие классы групп, но при этом выяснилось, что свойство почти аппроксимируемости конечными p-группами в ряде случаев выполняется не для всех p, а для всех достаточно больших p.

Так, Г. А. Носков доказал, что свойством почти F_p-аппроксимируемости для всех достаточно больших p обладают все конечно порожденные группы, являющиеся расширениями абелевых групп с помощью нильпотентных [17]. Д. Робинсоном было доказано аналогичное утверждение для финитно аппроксимируемых разрешимых минимаксных групп [30, sect. 5.3.9]. Наконец, знаменитая теорема В. П. Платонова [18] утверждает, что конечно порожденная линейная группа над полем нулевой характеристики почти F_p-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p. Отсюда следует, что любая такая группа почти вся без кручения (лемма Сельберга).

Вообще, надо заметить, что свойство линейности и свойство почти F_p-аппроксимируемости тесно связаны между собой. А. Лубоцкий [31] получил характеризацию конечно порожденных линейных групп над полями нулевой характеристики в терминах, близких к почти F_p-аппроксимируемости. Мы не приводим здесь формулировку этого результата, отметим только, что из него вытекает результат Платонова.

Одним из обобщений понятия конечно порожденной группы является понятие группы конечного общего ранга [12]. Группа G имеет конечный общий ранг, если существует число r такое, что любое конечное множество элементов группы G содержится в некоторой ее r-порожденной подгруппе.

Результаты Мальцева и Смирнова — Баумслага о группах автоморфизмов и расщепляемых расширениях легко обобщаются с конечно порожденных групп на группы конечного общего ранга. Однако, как уже отмечалось, эти результаты нельзя распространить с финитной аппроксимируемости на F_p-аппроксимируемость. Тем не менее удается перенести эти результаты на почти F_p-аппроксимируемость. Иными словами, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если группа G конечного общего ранга F-аппроксимируема (почти F_p-аппроксимируема), то финитно аппроксимируемыми (почти F_p-аппроксимируемыми) являются группа автоморфизмов группы G и любое расщепляемое расширение группы G с помощью финитно аппроксимируемой (почти F_p-аппроксимируемой) группы* [2].

Следствием этой теоремы являются упомянутые выше теоремы Мальцева, Смирнова — Баумслага, а также нетривиальный результат А. Лубоцкого [32] о почти F_p-аппроксимируемости группы автоморфизмов конечно порожденной почти F_p-аппроксимируемой группы. Недавно этот результат был заново доказан Л. Паризом [35] для частного случая — группы автоморфизмов конечно порожденной свободной группы. Заметим еще, что доказательство, приведенное Лубоцким, использует нетривиальные топологические методы, в то время как доказательство теоремы 1, опубликованное в [2], элементарно.

Наряду с группами конечного общего ранга рассматриваются группы конечного специального ранга [12]. Их еще называют группами конечного ранга Прюфера, а чаще просто группами конечного ранга. Группа G имеет конечный ранг, если существует число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами. Это требование является более жестким, чем конечность общего ранга.

А. Лубоцкий и А. Манн [33] доказали, что F-аппроксимируемая группа конечного ранга почти локально разрешима. В связи с этим нетривиальным результатом отметим следующий результат автора данной статьи.

Теорема 2. *Если группа конечного ранга F_p-аппроксимируема для всех простых p из некоторого бесконечного множества простых чисел, то она нильпотентна* [9].

Ранее такая теорема была доказана К. Сексенбаевым [19] для полициклических групп. Заметим, что любая полициклическая группа имеет конечный ранг.

Ряд аппроксимационных свойств полициклических групп удается в том или ином виде распространить на разрешимые группы конечного ранга. Так, например, Д. Робинсон получил следующее нетривиальное обобщение теоремы Гирша о финитной аппроксимируемости полициклических групп на случай разрешимых групп конечного ранга: *разрешимая группа конечного ранга F-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована* [30, sect. 5.3.2] . Напомним, что группа называется редуцированной, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп. Группа называется полной, если из любого ее элемента в ней можно извлечь корень любой натуральной степени. Заметим, что любая F-аппроксимируемая группа редуцирована.

Мы не располагаем p-аналогом теоремы Робинсона, но для свойства почти F_p-аппроксимируемости разрешимой группы конечного ранга удалось доказать следующий критерий.

Теорема 3. *Разрешимая группа конечного ранга является почти F_p-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда ее периодический радикал конечен и она не содержит подгрупп, изоморфных группе p-ичных дробей* [4].

Отсюда в качестве следствия вытекает следующий результат Д. Робинсона: *если разрешимая минимаксная группа редуцирована, то она почти F_p-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p* [30, sect. 5.3.9].

В самом деле, напомним, что минимаксные группы — это группы, обладающие субнормальным рядом, каждый фактор которого удовлетворяет либо условию минимальности, либо условию максимальности для подгрупп. Разрешимые минимаксные группы могут быть охарактеризованы как группы, обладающие рядом, каждый фактор которого либо циклический, либо квазициклический. Если мы теперь удалим все простые числа, соответствующие квазициклическим факторам, то для каждого оставшегося простого p в данной группе нет подгрупп, изоморфных группе p-ичных дробей. Если вдобавок предположить, что разрешимая минимаксная группа редуцирована, то ее периодический радикал будет конечным, и тогда в силу теоремы 3 данная группа почти F_p-аппроксимируема для указанных выше простых p.

Примером разрешимой минимаксной группы может служить группа Баумслага — Солитэра типа (1, n). Легко проверяется, что если простое число p не делит n, то группа Баумслага — Солитэра типа (1, n) не содержит подгрупп, изоморфных группе p-ичных дробей, и тогда по теореме 3 она почти F_p-аппроксимируема. В действительности имеет место следующий критерий, который годится для всех групп Баумслага — Солитэра (а не только для разрешимых).

Теорема 4. *Группа Баумслага — Солитэра типа (m, n) является почти F_p-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда или m совпадает с ±1 и p не делит n, или n совпадает с ±1 и p не делит m, или модули чисел m и n совпадают* [3].

Напомним, что группа Баумслага — Солитэра типа (m, n) является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда или m совпадает с ±1, или n совпадает с ±1, или модули чисел m и n совпадают [25, 34]. Критерий F_p-аппроксимируемости для групп Баумслага — Солитэра был найден Д. И. Молдаванским [15].

Группы Баумслага — Солитэра являются простейшими примерами HNN-расширений. Для HNN-расширений нам также удалось получить ряд результатов. Начнем с нисходящих HNN-расширений, т. е. со случая, когда одна из связанных подгрупп совпадает с базой HNN-расширения. Для финитной аппроксимируемости таких HNN-расширений Д. И. Молдаванский получил один общий фильтрационный критерий [16], с помощью которого впоследствии были доказаны более конкретные результаты, и в частности следующий.

Теорема 5. *Пусть G — группа конечного общего ранга, φ — инъективный эндоморфизм группы G, G(φ) — соответствующее нисходящее HNN-расширение группы G. И пусть индекс подгруппы Gφ в группе G конечен и равен n. Если группа G почти F_p-аппроксимируема для некоторого простого p, не делящего n, то группа G(φ) финитно аппроксимируема и даже почти F_p-аппроксимируема* [5].

Эта теорема может быть применена, например, если база HNN-расширения является редуцированной разрешимой минимаксной группой. Действительно, любая редуцированная разрешимая минимаксная группа G почти F_p-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p и любая подгруппа группы G, изоморфная ей, имеет в ней конечный индекс. Поэтому следствием теоремы 5 является недавний результат А. Ремтулы и М. Ширвани [36] о F-аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения редуцированной разрешимой минимаксной группы. Еще более частным случаем теоремы 5 является результат Д. Вайса и Т. Су о F-аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения полициклической группы [29]. Доказательство Вайса и Су достаточно объемное и проводится сначала для нильпотентного случая. Доказательства Ремтулы и Ширвани тоже нетривиальны и затрагивают глубокие свойства разрешимых минимаксных групп, в этом плане авторам помогал сам Д. Робинсон. Наша теорема 5 доказывается гораздо проще, причем является значительно более общей.

А. Борисов и М. Сапир в работе [26] анонсировали свой результат о финитной аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения конечно порожденной линейной группы. Так как по теореме Платонова конечно порожденные линейные группы над полями нулевой характеристики почти аппроксимируемы конечными p-группами для всех достаточно больших простых p, то теорема 5 может рассматриваться как частичное обобщение теоремы Борисова — Сапира.

В целом остается много вопросов о финитной аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения.

В случае, когда HNN-расширение не является нисходящим, удалось получить следующий результат.

Теорема 6. *Пусть G — финитно аппроксимируемая (почти F_p-аппроксимируемая) группа конечного общего ранга с нетривиальным тождеством. И пусть H — HNN-расширение группы G с собственными связанными подгруппами, имеющими конечные индексы в группе G. Группа H финитно аппроксимируема (почти F_p-аппроксимируема) тогда и только тогда, когда в группе G существует подгруппа конечного индекса, нормальная в H* [6].

Это утверждение обобщает аналогичный результат С. Андреадакиса, Е. Раптиса, Д. Варсоса [22] о F-аппроксимируемости HNN-расширений конечно порожденных абелевых групп. Заметим также, что из теорем 6 и 7 вытекают упомянутые выше критерии финитной аппроксимируемости и почти аппроксимируемости конечными p-группами для групп Баумслага — Солитэра.

Утверждение, аналогичное теореме 6, доказано нами и для обобщенных свободных произведений.

Теорема 7. *Пусть A и B — финитно аппроксимируемые (почти F_p-аппроксимируемые) группы конечного общего ранга с нетривиальными тождествами. И пусть P — свободное произведение групп A и B с собственной объединенной подгруппой H, имеющей конечные индексы в группах A и B. Группа P F-аппроксимируема (почти Fp-аппроксимируема) тогда и только тогда, когда в группе H существует подгруппа конечного индекса, нормальная в P* [6].

Финитная аппроксимируемость обобщенных свободных произведений исследуется при определенных ограничениях на объединенную подгруппу.

Например, в теореме 7 предполагалось, что она имеет конечные индексы в свободных множителях. Другим естественным ограничением является нормальность объединенной подгруппы в свободных множителях. Г. Баумслаг [24] доказал, что свободное произведение двух полициклических групп с нормальным объединением F-аппроксимируемо. Нетривиальным обобщением этой теоремы будет следующий результат, полученный автором совместно с А. В. Розовым.

Теорема 8. *Пусть P — свободное произведение разрешимых групп A и B конечного ранга с объединенной подгруппой H и H является собственной нормальной подгруппой в A и B. Группа P финитно аппроксимируема (почти F_p-аппроксимируема) тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/H финитно аппроксимируемы (почти F_p-аппроксимируемы).*

Это утверждение частично опубликовано в [10], оно обобщает недавний результат А. В. Розова о почти F_p-аппроксимируемости свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением для любого простого p. По поводу свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением следует заметить, что до сих пор остается открытой проблема о его линейности (Коуровская тетрадь, проблема 8.2).

Отметим еще два результата, относящихся к случаю, когда в обобщенном свободном произведении объединенная подгруппа является циклической.

Теорема 9. *Пусть P — свободное произведение F-аппроксимируемых разрешимых минимаксных групп A и B с циклической объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. Группа P F-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H финитно отделима в группах A и B* [7].

Это утверждение обобщает теорему Д. Дайер о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух полициклических групп с циклическим объединением [27], т. к. в полициклической группе все подгруппы финитно отделимы.

Теорема 10. *Пусть P — свободное произведение групп A и B с циклической объединенной подгруппой H. Если группы A и B аппроксимируемы полициклическими группами без кручения (конечно порожденными нильпотентными группами без кручения), то группа P финитно аппроксимируема (почти F_p-аппроксимируема для всех простых p).*

Это утверждение частично опубликовано в [8] и обобщает результат Г. Баумслага [24] о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением. Необходимое и достаточное условие F_p-аппроксимируемости для такого свободного произведения получено в [1].

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Мат. заметки. 1998. Т. 64, вып. 1. С. 3—8.
2. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Чебышевский сб. Тула, 2010. Т. 11, вып. 3. С. 11—20.

3. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами групп Баумслага — Солитэра // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20, № 1. С. 116—123.
4. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами некоторых разрешимых групп конечного ранга // Вестн. Иван. гос ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 80—85.
5. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами нисходящих HNN-расширений // Чебышевский сб. Тула, 2012. Т. 13, вып. 1. С. 9—19.
6. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1203—1215.
7. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых минимаксных групп с циклическими объединенными подгруппами // Мат. заметки. 2013. Т. 93, вып. 4. С. 483—491.
8. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с циклическим объединением // Чебышевский сб. Тула, 2013. Т. 14, вып. 3. С. 9—19.
9. *Азаров Д. Н.* Об аппроксимируемости конечными p-группами групп конечного ранга // Вестн. Иван. гос ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2001. Вып. 3. С. 103—105.
10. *Азаров Д. Н., Розов А. В.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2011. Вып. 2. С. 98—103.
11. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18, № 5. С. 49—60.
12. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. 1948. Т. 22, № 2. С. 351—352.
13. *Мальцев А. И.* О представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб. 1940. № 3. С. 305—422.
14. *Мальцев А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Мат. сб. 1949. Вып. 25, № 3. С. 347—366.
15. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость групп Баумслага — Солитэра // Чебышевский сб. Тула, 2012. Т. 13, вып. 1. С. 110—115.
16. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп // Укр. мат. журн. 1992. Т. 44. С. 842—845.
17. *Носков Г. А.* Почти аппроксимируемость конечно порожденных AP-групп без кручения конечными p-группами // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 6. С. 676—684.
18. *Платонов В. П.* Некоторые проблемы для конечно порожденных групп // Докл. АН БССР. 1968. Т. 12. 492—494.
19. *Сексенбаев К.* К теории полициклических групп // Алгебра и логика. 1965. Т. 4, вып. 3. С. 79—83.
20. *Смирнов Д. М.* К теории финитно аппроксимируемых групп // Укр. мат. журн. 1963. Т. 15. С. 453—457.
21. *Шмелькин А. Л.* Полициклические группы // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9. С. 234—235.
22. *Andreadakis S., Raptis E., Varsos D.* Residuall finiteness and hopficity of certain HNN-extensions // Arch. Math. 1986. Vol. 47. P. 1—5.
23. *Baumslag G.* Automorphism groups of residually finite groups // J. Lond. Math. Soc. 1963. Vol. 38. P. 117—118.
24. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106, № 2. P. 193—209.
25. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199—201.

26. *Borisov A., Sapir M.* Polynomial maps over finite fields and residual finiteness of mapping tori of group endomorphisms // arXiv: 0309121V1 [math. GR]. 2003. URL: http://arxiv.org (дата обращения: 14.01.2014).
27. *Dyer J.* On the residual finiteness of generalized free products // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 133, № 1. P. 131—143.
28. *Hirsh K. A.* On infinite soluble groups // J. Lond. Math. Soc. 1952. Vol. 27. P. 81—85.
29. *Hsu T., Wise D.* Ascending HNN-extensions of polycyclic groups are residually finite // J. Pure Appl. Algebra. 2003. Vol. 182, № 1. P. 65—78.
30. *Lennox J., Robinson D.* The theory of infinite soluble groups. Oxford : Clarendon press, 2004. 342 p.
31. *Lubotzki A.* A group-theoretic characterization of lenear groups // J. of Algebra. 1988. Vol. 113. P. 207—214.
32. *Lubotzki A.* Normal automorphisms of free groups // J. of Algebra. 1980. Vol. 63. P. 494—498.
33. *Lubotzki A., Mann A.* Residually finite groups of finite rank // Math. Proc. Comb. Phil. Soc. 1989. Vol. 106. P. 185—188.
34. *Meskin S.* Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 164. P. 105—114.
35. *Paris L.* Residual p-properties of mapping class groups and surface groups // arXiv: GR/0703703v1. 23 Mar. 2007. URL: http://arxiv.org (дата обращения: 14.01.2014).
36. *Rhemtulla A., Shirvani M.* The residual finiteness of ascending HNN-extensions of certain soluble groups // Illinois J. of Math. 2003. Vol. 47. P. 477—484.

УДК 512.543

Д. В. Гольцов

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

Сделан обзор основных результатов об аппроксимируемости корневыми классами свободных произведений групп.

Ключевые слова: свободное произведение с объединенной подгруппой, корневой класс групп, $\mathcal{K}$-аппроксимируемость групп.

A survey of the main results on the root-class residuality of free products group.

Key words: free product with amalgamated subgroups, root-class of groups, residually $\mathcal{K}$-group.

Пусть $\mathcal{K}$ — непустой класс групп. Группа G называется $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента a отличен от 1. Группа G называется почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, если она содержит некоторую $\mathcal{K}$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Класс $\mathcal{K}$ называется корневым, если он замкнут относительно подгрупп и для любой субнормальной последовательности $C \leq B \leq A$ из того, что факторы A/B и B/C принадлежат классу $\mathcal{K}$, следует, что в группе A существует нормальная подгруппа D такая, что $D \subseteq C$ и A/D принадлежит классу $\mathcal{K}$. Примером корневого класса может служить класс F всех конечных групп и класс F_p всех конечных p-групп.

В. Магнус, А. Каррас и Д. Солитэр в книге «Комбинаторная теория групп» приводят следующий результат К. Грюнберга: для того чтобы любое свободное произведение групп, аппроксимируемых данным корневым классом $\mathcal{K}$, само было $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой, необходимо и достаточно, чтобы любая свободная группа была $\mathcal{K}$-аппроксимируемой.

Д. Н. Азаров в [13] доказал, что любая свободная группа аппроксимируема любым корневым классом, поэтому результат Грюнберга принимает следующий вид.

Теорема 1. *Свободное произведение любого семейства групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, само является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой.*

С помощью теоремы 1 в работе [12] получены некоторые результаты, относящиеся к обобщенным свободным произведениям групп. В частности, доказано, что если $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно факторизации, то свободное произведение двух групп из класса $\mathcal{K}$ с центральными объединенными подгруппами аппроксимируемо классом $\mathcal{K}$. Там же доказано, что если $\mathcal{K}$ — произвольный корневой класс групп, то свободное произведение любых двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп с объединенными ретрактами является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой.

Г. Баумслаг в [15] доказал, что свободное произведение двух F-аппроксимируемых групп с конечными объединенными подгруппами является F-аппроксимируемой группой. Для произвольного корневого класса $\mathcal{K}$ этот результат не является справедливым: свободное произведение двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп с конечными объединенными подгруппами не обязано быть $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой. Тем не менее такое свободное произведение является почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой. Справедливо следующее утверждение, полученное в работе [10].

Теорема 2. *Пусть $G = (A * B, H = K)$ — свободное произведение групп A и B с конечными объединенными подгруппами H и K. Если группы A и B F-аппроксимируемы и почти аппроксимируемы корневым классом $\mathcal{K}$, то и группа G почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема. В частности, если группы A и B почти аппроксимируемы корневым классом $\mathcal{K}$, состоящим из конечных групп, то группа G почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Недавно автору удалось получить аналогичный результат для HNN-расширений. Доказано, что если группа почти аппроксимируема корневым классом, состоящим из конечных групп, то тем же свойством обладает и любое HNN-расширение этой группы с конечными связанными подгруппами.

Ранее аналоги этого утверждения и теоремы 2 были получены Д. Н. Азаровыми и Д. В. Гольцовым для частного случая, когда корневой класс состоит из конечных p-групп. Следует заметить, что далеко не все известные результаты об аппроксимируемости конечными p-группами удается распространить на аппроксимируемость произвольным корневым классом.

Рассмотрим теперь свободное произведение $G = \left(\underset{\lambda \in \Lambda}{*} G_\lambda, H \right)$ произвольного семейства групп $\left(G_\lambda \right)_{\lambda \in \Lambda}$ с одной объединенной подгруппой H. Для такого свободного произведения в работе [7] получен критерий финитной аппроксимируемости.

Теорема 3. *Пусть для каждого* $\lambda \in \Lambda$ *группа* G_λ *финитно аппроксимируема и подгруппа* H *конечна. Тогда группа* G *финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда для каждого* $\lambda \in \Lambda$ *в группе* G_λ *существует нормальная подгруппа* U_λ *конечного индекса такая, что* $U_\lambda \cap H = 1$ *и индексы* $\left[G_\lambda : U_\lambda \right]$ *ограничены в совокупности.*

Там же получен аналогичный результат об аппроксимируемости конечными p-группами.

В работе [14] нами доказан подобный результат и для почти аппроксимируемости группы $G = \left(\underset{\lambda \in \Lambda}{*} G_\lambda, H \right)$ произвольным корневым классом $\mathcal{K}$. Этот результат формулируется следующим образом.

Теорема 4. *Пусть* $G = \left(\underset{\lambda \in \Lambda}{*} G_\lambda, H \right)$ *— свободное произведение групп* G_λ *некоторого семейства* $\left(G_\lambda \right)_{\lambda \in \Lambda}$ *с одной объединенной подгруппой* H. *Пусть* $\mathcal{K}$ *— некоторый класс конечных групп, являющийся корневым. И пусть для каждого* $\lambda \in \Lambda$ *группа* G_λ *почти* $\mathcal{K}$*-аппроксимируема и подгруппа* H *конечна. Группа* G *почти* $\mathcal{K}$*-аппроксимируема тогда и только тогда, когда для каждого* $\lambda \in \Lambda$ *в группе* G_λ *существует нормальная подгруппа* U_λ *конечного индекса такая, что выполняются три условия:*

(1) $U_\lambda \cap H = 1$;

(2) *группа* U_λ *аппроксимируема классом* $\mathcal{K}$;

(3) *индексы* $\left[G_\lambda : U_\lambda \right]$ *ограничены в совокупности.*

Некоторые результаты об аппроксимируемости и почти аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп для конкретного корневого класса $\mathcal{K}$ получены в работах [1—6, 8, 9, 11]. Так, в [2, 3, 4, 9] исследуется вопрос о почти F_p-аппроксимируемости некоторых разрешимых групп, а также групп автоморфизмов и расщепляемых расширений. К сожалению, пока не удается распространить каким-либо образом эти результаты на почти аппроксимируемость произвольным корневым классом. В работе [5] исследуется свойство почти F_p-аппроксимируемости для некоторых HNN-расширений. Эти результаты также не удается обобщить на почти аппроксимируемость произвольным корневым классом групп. В [1, 6, 7, 8] исследуются свойства финитной аппроксимируемости, почти F_p-аппроксимируемости, F_p-аппроксимируемости и нильпотентной аппроксимируемости для обобщенных свободных произведений. Например, в [6] эти свойства полностью исследованы для свободного произведения свободных групп с циклическим объединением. Там же для такого свободного произведения доказано свойство аппроксимируемости разрешимыми группами. Заметим, что класс разрешимых групп является корневым.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Мат. заметки. 1998. Т. 64, вып. 1. С. 3—8.
2. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Чебышевский сб. Тула, 2010. Т. 11, вып. 3. С. 11—20.
3. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами групп Баумслага — Солитэра // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20, № 1. С. 116—123.
4. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами некоторых разрешимых групп конечного ранга // Вестн. Иван. гос ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 80—85.
5. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1203—1215.
6. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых минимаксных групп с циклическими объединенными подгруппами // Мат. заметки. 2013. Т. 93, вып. 4. 483—491.
7. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 3—13.
8. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с циклическим объединением // Чебышевский сб. Тула, 2013. Т. 14, вып. 3. С. 9—19.
9. *Азаров Д. Н.* Об аппроксимируемости конечными p-группами групп конечного ранга // Вестн. Иван. гос ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2001. Вып. 3. С. 103—105.
10. *Азаров Д. Н., Гольцов Д. В.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами свободных произведений групп с одной объединенной конечной подгруппой // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 74—77.
11. *Азаров Д. Н., Розов А. В.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами // Вестн. Иван. гос ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2011. Вып. 2. С. 98—103.
12. *Азаров Д. Н., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2008. Вып. 6. С. 29—42.
13. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. Вып. 5. С. 6—10.
14. *Гольцов Д. В.* О почти аппроксимируемости корневыми классами обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп // Чебышевский сб. Тула, 2013. Т. 14, вып. 3. С. 53—59.
15. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106, № 2. P. 193—209.

УДК 512.543

Н. С. Савельичева, Е. В. Соколов

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ РАЗРЕШИМЫМИ ГРУППАМИ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

Пусть G — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп A и B с конечными объединенными подгруппами и пусть π — множество всех простых делителей порядков периодических частей групп A и B. Получено достаточное условие аппроксимируемости группы G конечными разрешимыми π-группами.

Ключевые слова: аппроксимируемость разрешимыми группами, обобщенное свободное произведение.

Let G be the free product of finitely generated nilpotent groups A and B with finite amalgamated subgroups, let π be the set of all prime divisors of the orders of the torsion parts of A and B, and let $\mathcal{FS}_\pi$ be the class of all finite solvable π-groups. We find a sufficient condition for G to be residually an $\mathcal{FS}_\pi$-group.

Key words: residual solvability, generalized free product.

1. Введение. Формулировка результатов

Пусть A и B — конечно порожденные нильпотентные группы, $H \leq A$ и $K \leq B$ — некоторые изоморфные конечные подгруппы, $\varphi: H \to K$ — изоморфизм и G — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ. Из теоремы 3 работы [6] следует, что группа G финитно аппроксимируема. Естественным образом возникает вопрос об отыскании условий аппроксимируемости этой группы тем или иным подклассом класса всех конечных групп.

Д. Н. Азаровым [1] найден критерий аппроксимируемости обобщенного свободного произведения G конечными p-группами (см. теорему 1 ниже). В настоящей работе получено достаточное условие аппроксимируемости группы G конечными разрешимыми группами (теорема 2), обобщающее соответствующую часть результата Д. Н. Азарова. Прежде чем сформулировать перечисленные утверждения, введем ряд обозначений и напомним некоторые факты, касающиеся нильпотентных групп.

Хорошо известно (см., напр., [5, § 4]), что в локально нильпотентной группе N множество всех элементов конечного порядка образует характеристическую подгруппу, называемую периодической частью группы N и обозначаемую $\tau(N)$. Если группа N конечно порождена и, следовательно, нильпотентна, то подгруппа $\tau(N)$ является конечной и по теореме Бернсайда — Виландта раскладывается в прямое произведение своих силовских подгрупп. К. Грюнберг доказал, что группа N аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда $\tau(N)$ является p-группой [7, теорема 2.1].

Напомним, что главным рядом группы называется нормальный ряд, не допускающий нетривиальных нормальных уплотнений. Нетрудно показать (см., напр., [5, лемма 1.4]), что каждая конечная p-группа нильпотентна. Отсюда легко следует, что нормальный ряд такой группы является главным тогда и только тогда, когда все его факторы имеют порядок 1 или p (мы будем считать, что последовательные члены ряда могут совпадать).

Пусть далее S и T — периодические части групп A и B соответственно, $\pi = \{p_1, \dots, p_n\}$ — множество всех простых делителей порядков групп S и T. Пусть также $S_k \leq S$ и $T_k \leq T$ — силовские подгруппы, соответствующие числу p_k, $k \in \{1, \dots, n\}$. Так как последнее не обязано делить порядки обеих групп S и T, то одна из подгрупп S_k и T_k может быть равна 1.

Теорема 1 [1]. Предположим, что группы A и B аппроксимируются конечными p-группами, т. е. $\pi = \{p\}$. Группа G аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда в группах S и T существуют главные ряды $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$, удовлетворяющие следующим двум условиям:

(a) ряды $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ являются (H, K, φ)-совместимыми, т. е. множество пересечений членов ряда $\mathcal{R}_S$ с подгруппой H под действием φ переходит на множество пересечений членов ряда $\mathcal{R}_T$ с подгруппой K;

(b) члены рядов $\mathcal{R}_S$ и $\mathcal{R}_T$ нормальны в группах A и B соответственно.

Теорема 2. Пусть для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ в группах S_k и T_k существуют главные ряды $\mathcal{R}_{S_k}$ и $\mathcal{R}_{T_k}$, удовлетворяющие следующим двум условиям:

(a) ряды $\mathcal{R}_{S_k}$ и $\mathcal{R}_{T_k}$ являются (H, K, φ)-совместимыми;

(b) члены рядов $\mathcal{R}_{S_k}$ и $\mathcal{R}_{T_k}$ нормальны в группах A и B соответственно.

Тогда обобщенное свободное произведение G аппроксимируется конечными разрешимыми π-группами.

2. Вспомогательные утверждения

Для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ обозначим через $\overline{S_k}$ подгруппу

$$S_1 \times \dots \times S_{k-1} \times S_{k+1} \times \dots \times S_n$$

группы A и через $\overline{T_k}$ — подгруппу

$$T_1 \times \dots \times T_{k-1} \times T_{k+1} \times \dots \times T_n$$

группы B. Очевидно, что подгруппа $\overline{S_k}$ нормальна в группе A и подгруппа $\overline{T_k}$ нормальна в группе B.

Предложение 2.1. Для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ периодическая часть $\tau(A/\overline{S_k})$ фактор-группы $A/\overline{S_k}$ совпадает с подгруппой $S/\overline{S_k}$, периодическая часть $\tau(B/\overline{T_k})$ фактор-группы $B/\overline{T_k}$ совпадает с подгруппой $T/\overline{T_k}$.

Доказательство. Пусть $a\overline{S_k} \in \tau(A/\overline{S_k})$. Тогда существует целое число $x \geq 0$ такое, что $(a\overline{S_k})^x = 1$. Отсюда $a^x\overline{S_k} = 1$ и $a^x \in \overline{S_k}$. Так как $\overline{S_k} \leq S$, то существует целое число $y \geq 0$ такое, что $(a^x)^y = 1$. Следовательно, $a^{xy} = 1$ и $a \in S$. Таким образом, $\tau(A/\overline{S_k}) \leq S/\overline{S_k}$.

Пусть теперь $a\overline{S_k} \in S/\overline{S_k}$. Тогда $a \in S$ и существует целое число $z \geq 0$ такое, что $a^z = 1$. Отсюда $(a\overline{S_k})^z = a^z\overline{S_k} = \overline{S_k} = 1$ и потому $|a\overline{S_k}| < \infty$, т. е. $a\overline{S_k} \in \tau(A/\overline{S_k})$. Тем самым имеет место обратное включение.

Рассуждения для группы $B/\overline{T_k}$ аналогичны.

Предложение 2.2. Для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ фактор-группы $A/\overline{S_k}$ и $B/\overline{T_k}$ аппроксимируются конечными p_k-группами.

Доказательство. В силу предложения 2.1 и соотношения $\overline{S_k} \cap S_k = 1$

$$\tau(A/\overline{S_k}) = S/\overline{S_k} = S_k\overline{S_k}/\overline{S_k} \cong S_k/(\overline{S_k} \cap S_k) \cong S_k.$$

Следовательно, $\tau(A/\overline{S_k})$ — конечная p_k-группа. Как уже было отмечено во введении, это равносильно аппроксимируемости фактор-группы $A/\overline{S_k}$ конечными p_k-группами. Рассуждения для группы $B/\overline{T_k}$ аналогичны.

Предложение 2.3. Элемент $g \in S$ $(g \in T)$ принадлежит подгруппе $\overline{S_k}$ (соответственно подгруппе $\overline{T_k}$) тогда и только тогда, когда все простые делители его порядка содержатся во множестве $\{p_1, \ldots, p_{k-1}, p_{k+1}, \ldots, p_n\}$.

Доказательство. Пусть $g \in S$. Запишем элемент g в виде $g = g_1 \ldots g_n$, где $g_i \in S_i$, $1 \leq i \leq n$, и обозначим его порядок через q. Поскольку порядки всех элементов подгруппы S_i являются степенями числа p_i, для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует целое число $x_i \geq 0$ такое, что $g_i^{p_i^{x_i}} = 1$.

Предположим сначала, что p_k не делит q. Тогда $\left(p_k^{x_k}, q\right) = 1$. Записывая наибольший общий делитель $\left(p_k^{x_k}, q\right)$ в виде $\left(p_k^{x_k}, q\right) = up_k^{x_k} + vq$ для подходящих чисел $u, v \in \mathbb{Z}$, получаем, что

$$g_k = g_k^{(p_k^{x_k},\, q)} = g_k^{up_k^{x_k} + vq} = \left(g_k^{p_k^{x_k}}\right)^u \left(g_k^q\right)^v = 1$$

и, следовательно, $g \in \overline{S_k}$.

Предположим теперь, что $g \in \overline{S_k}$. Тогда $g = g_1 \ldots g_{k-1} g_{k+1} \ldots g_n$ и потому $g^r = 1$, где $r = p_1^{x_1} \ldots p_{k-1}^{x_{k-1}} p_{k+1}^{x_{k+1}} \ldots p_n^{x_n}$.

Так как $(q, r) = wq + tr$ для подходящих чисел $w, t \in \mathbb{Z}$, то $g^{(q,\, r)} = (g^q)^w (g^r)^t = 1$. Предположим, что q не делит r. Тогда $(q, r) < q$, и мы получаем противоречие с тем, что q — минимальное положительное число такое, что $g^q = 1$. Следовательно, $q \mid r$, и потому все простые делители числа q содержатся во множестве $\{p_1, \ldots, p_{k-1}, p_{k+1}, \ldots, p_n\}$.

Рассуждения для элемента $g \in T$ аналогичны.

Предложение 2.4. Для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ подгруппы $\overline{S_k}$ и $\overline{T_k}$ (H, K, φ)-совместимы, т. е. $(\overline{S_k} \cap H)\varphi = \overline{T_k} \cap K$.

Доказательство. Пусть $a \in \overline{S_k} \cap H$ — произвольный элемент. Тогда $a \in \overline{S_k}$ и $a \in H$. Из соотношения $a \in H$ следует, что $a\varphi \in K$. Так как $a \in \overline{S_k}$, то согласно предложению 2.3 его порядок не делится на p_k. При изоморфизме порядок элемента сохраняется. Поэтому снова по предложению 2.3 $a\varphi \in \overline{T_k}$. Следовательно, $a\varphi \in K \cap \overline{T_k}$. В силу произвольности выбора элемента a отсюда вытекает, что $(\overline{S_k} \cap H)\varphi \subseteq \overline{T_k} \cap K$.

Аналогично доказывается противоположное включение.

Пусть $b \in K \cap \overline{T_k}$ — произвольный элемент. Так как $b \in K$ и $K = H\varphi$, то существует элемент $a \in H$ такой, что $a\varphi = b$. Предполагая, что порядок элемента a делится на p_k, мы получаем, что тогда порядок элемента $a\varphi = b$ также делится на p_k. Но согласно предложению 2.3 это означает, что $b \notin \overline{T_k}$ вопреки выбору элемента b. Следовательно, порядок элемента a не делится на p_k и по предложению 2.3 $a \in \overline{S_k}$.

Итак, $a \in H \cap \overline{S_k}$ и $a\varphi = b$. Как и выше, в силу произвольности b получаем, что $(\overline{S_k} \cap H)\varphi \supseteq \overline{T_k} \cap K$.

Пусть X — прямое произведение некоторых групп $X_1, \ldots, X_n$ и $x \in X$. Тогда элемент x может быть однозначно записан в виде $x = x_1x_2\ldots x_n$, где $x_i \in X_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Сомножитель x_k $(1 \leq k \leq n)$ будем называть проекцией элемента x на группу X_k и обозначать через $pr_{X_k}x$. Если $U \subseteq X$, то проекцией множества U на группу X_k назовем множество $pr_{X_k}U$, состоящее из проекций на X_k всех элементов из U.

Предложение 2.5. Для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ имеют место соотношения $pr_{S_k}H = H \cap S_k$ и $pr_{T_k}K = K \cap T_k$.

Доказательство. Пусть $h \in H$ — произвольный элемент, запишем его в виде

$$h = h_1h_2\ldots h_{k-1}h_kh_{k+1}\ldots h_n, \qquad (*)$$

где $h_i \in S_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Так как порядки всех элементов подгруппы S_i являются степенями числа p_i, то для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует целое число $x_i \geq 0$ такое, что $h_i^{p_i^{x_i}} = 1$. Положим $r = p_1^{x_1}\ldots p_{k-1}^{x_{k-1}}p_{k+1}^{x_{k+1}}\ldots p_n^{x_n}$. Тогда $h^r = h_k^r$.

Поскольку $(p_k^{x_k}, r) = 1$, для подходящих чисел $u, v \in \mathbb{Z}$ имеет место соотношение $up_k^{x_k} + vr = 1$ и

$$h_k = h_k^{up_k^{x_k}+vr} = (h_k^r)^v = h^{rv} \in H.$$

Таким образом, проекция произвольного элемента $h \in H$ на группу S_k содержится в $H \cap S_k$, откуда следует, что $pr_{S_k}H \subseteq H \cap S_k$.

В силу однозначности записи элемента $h \in H$ в виде $(*)$ из соотношения $h \in S_k$ вытекает, что $h = pr_{S_k}h$. Стало быть, противоположное включение $pr_{S_k}H \supseteq H \cap S_k$ также имеет место.

Равенство $pr_{T_k}K = K \cap T_k$ проверяется аналогично.

Пусть σ — произвольное множество простых чисел. Тогда через σ' будем обозначать множество всех простых чисел, не принадлежащих σ. Если

p — простое число, то через p' обозначим множество всех простых чисел, не равных p. Таким образом, $p' = \{p\}'$.

Напомним, что целое число z называется σ-числом, если все его простые делители принадлежат множеству σ. Периодическая группа называется σ-группой, если порядки всех ее элементов являются σ-числами.

Если Y — подгруппа некоторой группы X, то через $Rt_{\sigma}(X, Y)$ будем обозначать множество всех тех элементов группы X, которые в некоторой σ-степени принадлежат подгруппе Y. Напомним, что подгруппа Y называется σ-изолированной в X, если для любого элемента $x \in X$ и для всякого простого числа $q \in \sigma$ из условия $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$. Очевидно, что подгруппа Y σ-изолирована в группе X тогда и только тогда, когда $Y = Rt_{\sigma}(X, Y)$.

Предложение 2.6 [5, теорема 4.5]. Пусть σ — произвольное множество простых чисел. Для любой подгруппы Y локально нильпотентной группы X множество $Rt_{\sigma}(X, Y)$ является подгруппой.

Предложение 2.7 [4, предложение 3]. Пусть σ — произвольное множество простых чисел. Если Y — σ-изолированная подгруппа некоторой группы X, то для любого элемента $x \in X \backslash Y$ найдется такое число $p \notin \sigma$, что $x \notin Rt_{p'}(X, Y)$.

Предложение 2.8. Для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ и для любых подгрупп $X \leq A$ и $Y \leq B$ имеют место включения $\overline{S_k} \subseteq Rt_{p'_k}(A, X)$ и $\overline{T_k} \subseteq Rt_{p'_k}(B, Y)$.

Доказательство. Пусть $a \in \overline{S_k}$. Тогда по предложению 2.3 порядок q элемента a не делится на p_k, т. е. является p'_k-числом. Поскольку $a^q = 1$, мы имеем $a \in Rt_{p'_k}(A, 1) \subseteq Rt_{p'_k}(A, X)$. Рассуждения для подгруппы $\overline{T_k}$ аналогичны.

Предложение 2.9. Каждая конечная подгруппа группы A π'-изолирована в A, каждая конечная подгруппа группы B π'-изолирована в B.

Доказательство. Пусть X — конечная подгруппа группы A, $a \in A \backslash X$ и $q \in \pi'$ — произвольные элемент и простое число. И пусть $a^q \in X$. Тогда элемент a имеет конечный порядок и, следовательно, принадлежит подгруппе S. Поскольку S — конечная π-группа, порядок t элемента a является π-числом. При этом $q \notin \pi$, значит, $1 = (q, t) = uq + vt$ для подходящих $u, v \in \mathbb{Z}$ и $a = (a^q)^u (a^t)^v = (a^q)^u \in X$. Таким образом, подгруппа X π'-изолирована в группе A. Рассуждения для подгрупп группы B аналогичны.

3. Доказательство теоремы 2

В силу предложения 2.4 для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ подгруппы $\overline{S_k}$ и $\overline{T_k}$ являются (H, K, φ)-совместимыми. Отсюда нетрудно вывести, что отображение $\varphi_{\overline{S_k}, \overline{T_k}}: H\overline{S_k} / \overline{S_k} \to K\overline{T_k} / \overline{T_k}$, переводящее элемент $h\overline{S_k}$ $(h \in H)$ в элемент $(h\varphi)\overline{T_k}$, корректно определено и представляет собой изоморфизм подгрупп. Поэтому мы можем рассмотреть свободное произведение $G_{\overline{S_k}, \overline{T_k}}$ фактор-групп

$A/\overline{S_k}$ и $B/\overline{T_k}$ с подгруппами $H\overline{S_k}/\overline{S_k}$ и $K\overline{T_k}/\overline{T_k}$, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$. Естественные гомоморфизмы $\varepsilon_k\colon A \to A/\overline{S_k}$ и $\delta_k\colon B \to B/\overline{T_k}$, рассматриваемые как отображения групп A и B в группу $G_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$, действуют на подгруппах H и K согласованно (т. е. $h\varepsilon_k = (h\varphi)\delta_k$ при всех $h \in H$). Следовательно, в силу теоремы [8, с. 505] существует продолжающий их сюръективный гомоморфизм $\rho_{\overline{S_k},\overline{T_k}}\colon G \to G_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$.

По условию теоремы для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ в группах S_k и T_k имеются главные ряды

$$1 = S_{k1} \leq S_{k2} \leq \ldots \leq S_{km_{k1}} = S_k, \qquad (\mathcal{R}_{S_k})$$
$$1 = T_{k1} \leq T_{k2} \leq \ldots \leq T_{km_{k2}} = T_k, \qquad (\mathcal{R}_{T_k})$$

удовлетворяющие следующим двум условиям:

(a) ряды $\mathcal{R}_{S_k}$ и $\mathcal{R}_{T_k}$ являются (H, K, φ)-совместимыми;

(b) члены рядов $\mathcal{R}_{S_k}$ и $\mathcal{R}_{T_k}$ нормальны в группах A и B соответственно.

Очевидно, что, повторяя при необходимости последний член ряда, мы можем сделать количество членов во всех рядах одинаковым. Обозначим это число через m.

Предложение 3.1. Для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ ряды

$$1 = S_{k1}\overline{S_k}/\overline{S_k} \leq S_{k2}\overline{S_k}/\overline{S_k} \leq \ldots \leq S_{km}\overline{S_k}/\overline{S_k} = S_k\overline{S_k}/\overline{S_k} = S/\overline{S_k}, \qquad (\overline{\mathcal{R}_{S_k}})$$
$$1 = T_{k1}\overline{T_k}/\overline{T_k} \leq T_{k2}\overline{T_k}/\overline{T_k} \leq \ldots \leq T_{km}\overline{T_k}/\overline{T_k} = T_k\overline{T_k}/\overline{T_k} = T/\overline{T_k} \qquad (\overline{\mathcal{R}_{T_k}})$$

удовлетворяют следующим условиям:

(a) члены рядов $\overline{\mathcal{R}_{S_k}}$ и $\overline{\mathcal{R}_{T_k}}$ нормальны в группах $A/\overline{S_k}$ и $B/\overline{T_k}$ соответственно;

(b) оба ряда $\overline{\mathcal{R}_{S_k}}$ и $\overline{\mathcal{R}_{T_k}}$ являются главными;

(c) ряды $\overline{\mathcal{R}_{S_k}}$ и $\overline{\mathcal{R}_{T_k}}$ $(H\overline{S_k}/\overline{S_k}, K\overline{T_k}/\overline{T_k}, \varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}})$-совместимы.

Доказательство. Поскольку члены ряда $\overline{\mathcal{R}_{S_k}}$ являются образами членов ряда $\mathcal{R}_{S_k}$ относительно естественного гомоморфизма группы A на фактор-группу $A/\overline{S_k}$, все они нормальны в группе $A/\overline{S_k}$. По тем же причинам члены ряда $\overline{\mathcal{R}_{T_k}}$ нормальны в группе $B/\overline{T_k}$.

Пусть $i \in \{2, \ldots, m\}$. Тогда

$$(S_{ki}\overline{S_k}/\overline{S_k})/(S_{k,\,i-1}\overline{S_k}/\overline{S_k}) \cong S_{ki}\overline{S_k}/S_{k,\,i-1}\overline{S_k} \cong S_{ki}/S_{k,\,i-1}(S_{ki} \cap \overline{S_k}).$$

Но $S_{ki} \leq S_k$ и $S_k \cap \overline{S_k} = 1$. Следовательно, $S_{ki}\overline{S_k}/S_{k,\,i-1}\overline{S_k} \cong S_{ki}/S_{k,\,i-1}$ и

$$\left|(S_{ki}\overline{S_k}/\overline{S_k})/(S_{k,\,i-1}\overline{S_k}/\overline{S_k})\right| = \left|S_{ki}/S_{k,\,i-1}\right| \in \{1, p_k\}.$$

Аналогично проверяется, что $\left|(T_{ki}\overline{T_k}/\overline{T_k})/(T_{k,\,i-1}\overline{T_k}/\overline{T_k})\right| \in \{1, p_k\}$.

Таким образом, ряды $\overline{\mathcal{R}_{S_k}}$ и $\overline{\mathcal{R}_{T_k}}$ являются главными. Остается проверить, что они $(H\overline{S_k}/\overline{S_k}, K\overline{T_k}/\overline{T_k}, \varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}})$-совместимы.

Вследствие (H, K, φ)-совместимости рядов $\mathcal{R}_{S_k}$ и $\mathcal{R}_{T_k}$ для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ найдется такое $j \in \{1, \ldots, m\}$, что $(S_{ki} \cap H)\varphi = T_{kj} \cap K$, и наоборот. Для завершения доказательства предложения нам достаточно показать, что из равенства $(S_{ki} \cap H)\varphi = T_{kj} \cap K$ для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ следует, что $(S_{ki}\overline{S_k}/\overline{S_k} \cap H\overline{S_k}/\overline{S_k})\varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}} = T_{kj}\overline{T_k}/\overline{T_k} \cap K\overline{T_k}/\overline{T_k}$.

Пусть $a\overline{S_k} \in S_{ki}\overline{S_k}/\overline{S_k} \cap H\overline{S_k}/\overline{S_k}$ — произвольный элемент. Тогда $a \in S_{ki}\overline{S_k}$ и $a \in H\overline{S_k}$. Отсюда вытекает, что элемент a можно записать следующим образом: $a = ss_1$, где $s \in S_{ki}$, $s_1 \in \overline{S_k}$, и $a = hs_2$, где $h \in H$, $s_2 \in \overline{S_k}$.

Представим h в виде $h = h_k h'$, где $h_k \in S_k$ и $h' \in \overline{S_k}$. Тогда $a = h_k s_3$, где $s_3 = h' s_2 \in \overline{S_k}$. Так как $a = ss_1$, то $ss_1 = h_k s_3$ и $h_k^{-1}s = s_3 s_1^{-1}$. Но $h_k^{-1}s \in S_k$, $s_3 s_1^{-1} \in \overline{S_k}$ и $S_k \cap \overline{S_k} = 1$. Следовательно, $h_k^{-1}s = s_3 s_1^{-1} = 1$. Отсюда вытекает, что $s = h_k$, и, значит, $h_k \in S_{ki} \cap pr_{S_k}H$.

В силу предложения 2.5 имеет место равенство $pr_{S_k}H = H \cap S_k$. Поэтому $h_k \in S_{ki} \cap H \cap S_k = S_{ki} \cap H$. Из соотношения $(S_{ki} \cap H)\varphi = T_{kj} \cap K$ теперь следует, что $h_k\varphi \in T_{kj} \cap K$.

По определению изоморфизма $\varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$ $(h_k\overline{S_k})\varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}} = (h_k\varphi)\overline{T_k}$. Таким образом, $(a\overline{S_k})\varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}} = (h_k\overline{S_k})\varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}} \in T_{kj}\overline{T_k}/\overline{T_k} \cap K\overline{T_k}/\overline{T_k}$, и в силу произвольности выбора элемента $a\overline{S_k}$

$$(S_{ki}\overline{S_k}/\overline{S_k} \cap H\overline{S_k}/\overline{S_k})\varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}} \leq T_{kj}\overline{T_k}/\overline{T_k} \cap K\overline{T_k}/\overline{T_k}.$$

Докажем противоположное включение.

Пусть $b\overline{T_k} \in T_{kj}\overline{T_k}/\overline{T_k} \cap K\overline{T_k}/\overline{T_k}$ — произвольный элемент. Как и выше, проверяется, что тогда $b = yt$ для подходящих $y \in T_{kj} \cap K$, $t \in \overline{T_k}$.

Поскольку $(S_{ki} \cap H)\varphi = T_{kj} \cap K$, найдется такой элемент $x \in S_{ki} \cap H$, что $x\varphi = y$. Следовательно, $x\overline{S_k} \in S_{ki}\overline{S_k}/\overline{S_k} \cap H\overline{S_k}/\overline{S_k}$ и

$$(x\overline{S_k})\varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}} = (x\varphi)\overline{T_k} = y\overline{T_k} = b\overline{T_k}.$$

Таким образом, в силу произвольности выбора элемента $b\overline{T_k}$

$$T_{kj}\overline{T_k}/\overline{T_k} \cap K\overline{T_k}/\overline{T_k} \leq (S_{ki}\overline{S_k}/\overline{S_k} \cap H\overline{S_k}/\overline{S_k})\varphi_{\overline{S_k},\overline{T_k}},$$

что и требовалось.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из предложений 2.1, 2.2, 3.1 и теоремы 1.

Предложение 3.2. Для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ группа $G_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$ аппроксимируется конечными p_k-группами.

Пусть Σ — семейство нормальных подгрупп некоторой группы X. Будем говорить, что подгруппа $Y \leq X$ отделима в X семейством подгрупп Σ, если $\bigcap_{N \in \Sigma} YN = Y$.

Обозначим через $\mathcal{FS}_\pi$ класс всех конечных разрешимых π-групп и положим

$$\mathcal{FS}_\pi^*(G, A) = \{N \cap A | N \trianglelefteq G \wedge G/N \in \mathcal{FS}_\pi\},$$
$$\mathcal{FS}_\pi^*(G, B) = \{N \cap B | N \trianglelefteq G \wedge G/N \in \mathcal{FS}_\pi\}.$$

Предложение 3.3. Каждая конечная подгруппа группы A отделима семейством $\mathcal{FS}_\pi^*(G, A)$, каждая конечная подгруппа группы B отделима семейством $\mathcal{FS}_\pi^*(G, B)$.

Доказательство. Пусть X — конечная подгруппа группы A и $a \in A$ — произвольный элемент, не принадлежащий X. Укажем такую нормальную подгруппу N группы G, что $G/N \in \mathcal{FS}_\pi$ и $a \notin X(N \cap A)$.

В силу предложения 2.9 подгруппа X π'-изолирована в группе A, и по предложению 2.7 найдется число $p_k \in \pi$ такое, что $a \notin Rt_{p_k'}(A, X)$. Ввиду предложения 2.8 $\overline{S_k} \subseteq Rt_{p_k'}(A, X)$. Поскольку множество $Rt_{p_k'}(A, X)$ согласно предложению 2.6 является подгруппой, оно содержит и произведение $X\overline{S_k}$. Но $a \notin Rt_{p_k'}(A, X)$, значит, $a \notin X\overline{S_k}$.

Так как гомоморфизм $\rho_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$ продолжает естественный гомоморфизм группы A на фактор-группу $A/\overline{S_k}$, то в группе $G_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$ имеет место соотношение $a\rho_{\overline{S_k},\overline{T_k}} \notin X\rho_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$. Обобщенное свободное произведение $G_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$ в силу предложения 3.2 аппроксимируется конечными p_k-группами, а его подгруппа $X\rho_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$ конечна. Следовательно, в группе $G_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$ найдется такая нормальная подгруппа $N_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$ конечного p_k-индекса, что $a\rho_{\overline{S_k},\overline{T_k}} \notin X\rho_{\overline{S_k},\overline{T_k}}N_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$.

Пусть N — прообраз подгруппы $N_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$ в группе G относительно гомоморфизма $\rho_{\overline{S_k},\overline{T_k}}$. Тогда N — нормальная подгруппа конечного p_k-индекса группы G и $a \notin XN$. Так как любая конечная p_k-группа является конечной разрешимой π-группой, то $G/N \in \mathcal{FS}_\pi^*$. При этом очевидно, что $a \notin X(N \cap A)$. Следовательно, подгруппа N является искомой.

Рассуждения для подгрупп группы B аналогичны.

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству теоремы. В силу предложения 3.3 подгруппы 1 и H отделимы в группе A семейством $\mathcal{FS}_\pi^*(G, A)$, подгруппы 1 и K отделимы в группе B семейством $\mathcal{FS}_\pi^*(G, B)$. При этом класс $\mathcal{FS}_\pi$ является корневым [2, следствие 1]. Значит, искомое утверждение вытекает из основного результата работы [3], который применительно к классу $\mathcal{FS}_\pi$ может быть сформулирован следующим образом.

Предложение 3.4. Пусть подгруппы 1 и H отделимы в группе A семейством $\mathcal{FS}_\pi^*(G, A)$, подгруппы 1 и K отделимы в группе B семейством $\mathcal{FS}_\pi^*(G, B)$. Тогда группа G $\mathcal{FS}_\pi$-аппроксимируема.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* Об аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения двух нильпотентных групп с конечными объединенными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2006. Вып. 3. С. 102—106.
2. *Гудовщикова А. С., Соколов Е. В.* Два замечания о классе конечных разрешимых π-групп // Вестн. молодых ученых ИвГУ. 2012. С. 3–4.

3. *Гудовщикова А. С., Соколов Е. В.* Некоторые аппроксимационные свойства обобщенных свободных произведений двух групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 115—123.
4. *Соколов Е. В.* Об отделимости циклических подгрупп свободной группы корневым классом групп // Математика и ее приложения : журн. Иван. мат. о-ва. 2011. С. 101—104.
5. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика : период. сб. переводов иностр. ст. 1968. Т. 12, № 1. С. 3—36.
6. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106, № 2. P. 193—209.
7. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.
8. *Neumann B. H.* An essay on free products of groups with amalgamation // Phil. Trans. Royal Soc. of London. 1954. Vol. 246. P. 503—554.

УДК. 517.946

Л. Н. Кусковский

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ПУАНКАРЕ

Для дифференциальной системы с непрерывно дифференцируемыми комплексными искомыми и заданными функциями в конечной односвязной области плоскости, обобщающей известную систему Коши — Римана, ставится и решается краевая задача Пуанкаре. Получены условия нётеровости и формула индекса задачи.

Ключевые слова: условие Гёльдера, задача Пуанкаре, нётеровость задачи, индекс задачи.

The Poincare boundary value problem is formulated and solved for the differential system with complex, continuously differentiable data and desired functions on a finite, simply connected region of the plane (generalization of the Cauchy — Riemann system). The index problem formula and the Noether conditions are obtained.

Key words: Poincare problem, index problem, Noether condition for a problem, Holder condition.

§ 1. Предварительные сведения

В этом параграфе мы изложим основные понятия и обозначения, которые будут использоваться в работе:

G — конечная односвязная область плоскости $z = x + iy$, $i^2 = -1$;

∂G — замкнутая гладкая положительно ориентированная граница G;

$C^k(G)$ $\left(C^k(\partial G)\right)$ — пространство комплекснозначных функций, имеющих в G (на ∂G) непрерывные частные производные до порядка k включительно, $k = 0, 1, 2, \dots$;

$C_\nu^k(G)$ $\left(C_\nu^k(\partial G)\right)$ — пространство функций $f \in C^k(G)$ $\left(f \in C^k(\partial G)\right)$, удовлетворяющих в G (на ∂G) условию Гёльдера с показателем $0 < \nu \le 1$;

$\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$, $t \in \partial G$ — норма в пространстве $f \in C^0(\partial G)$;

$\|f\|_\nu = \|f\|_C + \sup\limits_{t_1, t_2} \dfrac{|f(t_2) - f(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\nu}$, $\forall t, t_1, t_2 \in \partial G$ — норма в пространстве функций $f \in C_\nu^0(\partial G)$.

Известно, что относительно введенных норм пространства $C^0(\partial G)$ и $C_\nu^0(\partial G)$ являются полными линейными нормированными пространствами, т. е. пространствами Банаха.

§ 2. Краевая задача типа Пуанкаре

В статье [2] для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &{\partial U}/{\partial x} - {\partial V}/{\partial y} = a_{11}U - ia_{12}V, \\ &{\partial U}/{\partial y} + {\partial V}/{\partial x} = ia_{12}U + a_{11}V \end{aligned} \tag{1}$$

с комплекснозначными искомыми $U, V \in C^2(G)$ и данными $a_{11}, a_{12} \in C^1(\overline{G})$ функциями была получена формула

$$\omega(z) = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\Phi(z, \bar z) + \iint\limits_G R(z, \varsigma, \bar z, \bar\varsigma)\Phi(\varsigma, \bar\varsigma)d\xi d\eta\right\}, \tag{2}$$

где $z = x + iy, \quad \varsigma = \xi + i\eta \in G, \quad i^2 = -1, \quad u(x, y) = U(x, y), \quad v(x, y) = -iV(x, y),$

$\omega(z) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}, \quad \Phi(z, \bar z) = \begin{pmatrix} \Phi_1(\bar z) \\ \Phi_2(z) \end{pmatrix}, \quad R(z, \varsigma, \bar z, \bar\varsigma) = \begin{pmatrix} R_1(\bar\varsigma, \bar z) & R_2(\varsigma, z) \\ R_1(\bar\varsigma, \bar z) & -R_2(\varsigma, z) \end{pmatrix},$

$R_1, R_2 \in C^1(\overline{G} \times \overline{G})$ — резольвенты интегральных уравнений ([2], формулы (4.3), (4.4)) интегрального представления всех решений системы (1) через произвольные функции $\Phi_1(\bar z)$, $\Phi_2(z)$, голоморфные относительно своих аргументов в G.

Для системы (1) поставим задачу Пуанкаре: *найти в области G решение $\omega(z)$ системы (1), принадлежащее пространству $C_\nu^1(\overline{G})$, по краевому условию*

$$\mathrm{Re}\left[p^1\omega_x + p^2\omega_y + q\omega\right] = \Upsilon(x, y), \ \ (x, y) \in \partial G, \tag{3}$$

где p^1, p^2 и q — заданные на ∂G комплексные матрицы второго порядка, принадлежащие пространству $C_\nu^0(\partial G)$, т. е. все элементы матриц являются функциями $C_\nu^0(\partial G)$, *а* $\Upsilon = (\Upsilon_1, \Upsilon_2)$ *— заданный на ∂G вещественный вектор пространства $C_\nu^0(\partial G)$.*

Здесь (и в дальнейшем) $\omega_x \equiv \partial\omega / \partial x,\ \ \omega_y \equiv \partial\omega / \partial y.$

Далее, полагая $t = x + iy \in \partial G,$ получим краевое условие, эквивалентное условию (3):

$$\mathrm{Re}\big[H_1(t)\omega_t + H_2(t)\omega_{\bar{t}} + q(t)\omega\big] = \Upsilon(t),\ \ t \in \partial G, \tag{4}$$

где $H_1(t) = p^1(t) + ip^2(t),\ \ H_2(t) = p^1(t) - ip^2(t).$ (5)

Так как матрицы p^1 и p^2 — комплексные, то $H_1(t)$ и $H_2(t)$ не являются сопряженными друг к другу. (Комплексное сопряжение всюду будем обозначать чертой сверху над символом.)

Известно [5, § 69], что для всяких голоморфных в G функций $\Phi_1(\bar{z})$, $\Phi_2(z)$ (2) существует единственная вещественная функция $\mu_k(t) \in C_\nu^0(\partial G)$, $k = 1, 2,$ для которой справедливо представление, полученное И. Н. Векуа, т. е.

$$\Phi_k(z) = \int\limits_{\partial G} \log e\left(1 - \frac{z}{t}\right)\mu_k(t)ds_t,\ \ z \in G,\ \ k = 1,2. \tag{6}$$

Здесь, без ограничения общности, считаем, что $0 \in G,$ $\mathrm{Im}\,\Phi_1(0) = 0,$ $\mathrm{Im}\,\Phi_2(0) = 0.$ Под $\log e\left(1 - \dfrac{z}{t}\right)$ при данном $t \in \partial G$ понимается однозначная в G ветвь этой функции, обращающаяся в единицу при $z = 0.$

Теперь, возвращаясь к формуле (2), потребуем, чтобы представленное этой формулой решение $\omega(z) \in C_\nu^1(G)$ системы (1) удовлетворяло условию (4). В этом случае, если подставить выражение (6) в интегральное уравнение (2) и перейти к пределу при $z \to t_0 \in \partial G$ изнутри области G, сформулированная задача (1), (4) приводится (для определения вектора $\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t))$) к сингулярному интегральному уравнению вида

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\Bigg[&\pi i\Big(\widetilde{H}_1(t_0)\bar{t}_0' + \widetilde{H}_2(t_0)t_0'\Big)\mu(t_0) + \widetilde{H}_1(t_0)\int\limits_{\partial G}\frac{\mu(t)}{t - t_0}ds_t + \\ &+ \widetilde{H}_2(t_0)\int\limits_{\partial G}\frac{\mu(t)}{\bar{t} - \bar{t}_0}ds_t + \int\limits_{\partial G}\widetilde{Q}(t_0, t, \bar{t}_0, \bar{t})\mu(t)ds_t\Bigg] = \Upsilon(t_0),\end{aligned} \tag{7}$$

где $t = t(s) = x(s) + iy(s);$ s — длина дуги (дуговая абсцисса), отсчитываемая от некоторой точки на ∂G по направлению положительной ориентации $\partial G;$ $t' = dt / ds = dx / ds + idy / ds;$

$$\widetilde{H}_1(t_0) = H_1(t_0)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ \widetilde{H}_2(t_0) = H_2(t_0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\widetilde{Q}(t_0, t, \bar{t}_0, \bar{t}) = \Big(Q_{t_0} + Q_{\bar{t}_0} + \widetilde{q}(t_0)P + Q\Big)(t_0, t, \bar{t}_0, \bar{t}), \tag{9}$$

где $Q_{t_0} = H_1(t_0)\iint\limits_G R_{t_0}(t_0, \varsigma, \overline{t_0}, \overline{\varsigma}) P(t, \overline{t}, \varsigma, \overline{\varsigma}) d\xi d\eta;$

$$Q_{\overline{t_0}} = H_2(t_0)\iint\limits_G R_{\overline{t_0}}(t_0, \varsigma, \overline{t_0}, \overline{\varsigma}) P(t, \overline{t}, \varsigma, \overline{\varsigma}) d\xi d\eta;$$

$$Q = q(t_0)\iint\limits_G R(t_0, \varsigma, \overline{t_0}, \overline{\varsigma}) P(t, \overline{t}, \varsigma, \overline{\varsigma}) d\xi d\eta;$$

$$\widetilde{q}(t_0) = q(t_0)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P(t, \bar{t}, \varsigma, \bar{\varsigma}) = \begin{pmatrix} -\log e\left(1 - \dfrac{\bar{\varsigma}}{\bar{t}}\right) & 0 \\ 0 & \log e\left(1 - \dfrac{\varsigma}{t}\right) \end{pmatrix}, \quad \varsigma \in G,$$

$\varsigma = \xi + i\eta,\ H_1(t_0),\ H_2(t_0)$ имеют вид (5).

Сингулярные интегралы определяются в смысле главного значения по Коши.

В силу тождества

$$\frac{ds}{\bar{t} - \bar{t}_0} = \frac{t' dt}{t - t_0} + t' d \log \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0}$$

уравнение (7) запишется в виде

$$\mathrm{Re}\left[\pi i H(t_0)\mu(t_0) + \int\limits_{\partial G} \frac{H(t)\mu(t)}{t - t_0} dt + \right. \\ \left. + \int\limits_{\partial G} \left(H_3(t_0, t, \bar{t}_0, \bar{t}) t' + \widetilde{Q}(t_0, t, \bar{t}_0, \bar{t}) \bar{t}' \right) \mu(t) dt \right] = \Upsilon(t_0), \tag{10}$$

где $H(t) = \widetilde{H}_1(t_0)\bar{t}' + \widetilde{H}_2(t_0) t',$ (11)

$$H_3(t_0, t, \bar{t}_0, \bar{t}) = \widetilde{H}_2(t_0) \frac{d \log \dfrac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0}}{dt}, \tag{12}$$

$\widetilde{H}_k(t_0),\ k = 1{,}2$ и $\widetilde{Q}(t_0, t, \bar{t}_0, \bar{t})$ определяются по (8) и (9).

В обозначениях

$$\alpha^*(t_0) = \mathrm{Re}\left[\pi i H(t_0)\right], \quad \beta^*(t_0) = K(t_0, t_0) = \mathrm{Im}\, i H(t_0), \tag{13}$$

$$K(t_0, t) = (t - t_0)\mathrm{Re}\left[\frac{H(t)}{t - t_0} + H_3(t_0, t, \bar{t}_0, \bar{t}) t' + \widetilde{Q}(t_0, t, \bar{t}_0, \bar{t}) \bar{t}' \right], \tag{14}$$

$$K^*(t_0, t) = \frac{K(t_0, t) - K(t_0, t_0)}{t - t_0} \tag{15}$$

уравнение (10) примет вид:

$$T\mu \equiv \alpha^*(t_0)\mu(t_0) + \beta^*(t_0) \int\limits_{\partial G} \frac{\mu(t)}{t - t_0} dt + \int\limits_{\partial G} K^*(t_0, t)\mu(t) dt = \Upsilon(t_0). \tag{16}$$

Для дальнейшего необходимо определение.

Определение [3, с. 177]. Пусть X и Y — банаховы пространства. Оператор $A: X \to Y$ называется *компактным* (или вполне непрерывным), если он переводит ограниченные множества из X в компактные множества в Y.

Это определение эквивалентно следующему: линейный оператор $A: X \to Y$ *компактен* тогда и только тогда, когда для любой ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset X$ последовательность образов $\{Ax_n\}$ имеет подпоследовательность, сходящуюся в Y.

Рассмотрим оператор K_*, определяемый ядром $K^*(t_0,t)$ в (16), т. е.

$$K_*\mu = (K_*\mu)(t_0) = \int_{\partial G} K^*(t_0,t)\mu(t)dt. \tag{17}$$

Теорема 1. Оператор K_* (17), действующий в пространстве $C_\nu^0(\partial G)$, — компактный.

Доказательство. Все рассматриваемые в работе функции относительно введенных в § 1 норм образуют банаховы пространства. В силу принятых предположений о гладкости данных задачи и контура ∂G из формул (5), (8), (9) и (11)—(15) следует, что при $t \neq t_0$ $K^*(t_0,t) \in C_\nu^0(\partial G)$. Если будет установлено, что множество функций $(K_*\mu)(t) \in C_\nu^0$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то из критерия компактности Арцела [3, с. 71] будет следовать компактность оператора K_* (17). Подробное доказательство этого имеется в [5, с. 173] и [4, с. 19—20].

Сингулярно интегральное уравнение (16) полностью изучено Н. П. Векуа [1].

Пусть комплексные матрицы p^1 и p^2 из (3) имеют вид

$$p^1(t) = \begin{pmatrix} \overset{1}{p}_{11} & \overset{1}{p}_{12} \\ \overset{1}{p}_{21} & \overset{1}{p}_{22} \end{pmatrix}, \quad p^2(t) = \begin{pmatrix} \overset{2}{p}_{11} & \overset{2}{p}_{12} \\ \overset{2}{p}_{21} & \overset{2}{p}_{22} \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. Если

$$\det p^1 + \det p^2 + i\left[\left(\overset{2}{p}_{11}\overset{1}{p}_{21} - \overset{1}{p}_{11}\overset{2}{p}_{21}\right) + \left(\overset{1}{p}_{12}\overset{2}{p}_{22} - \overset{2}{p}_{12}\overset{1}{p}_{22}\right)\right] \neq 0, \ \forall t \in \partial G, \tag{18}$$

то задача (1), (3) нётерова и ее индекс

$$\chi = 2n, \tag{19}$$

где $n = \frac{1}{2\pi}\Delta\big|_{\partial G} \arg\det\overline{H(t)}$ ($H(t)$ определяется по (11)).

Доказательство. Согласно (13) имеем

$$\alpha^*(t) + i\pi\beta^*(t) = \pi i H(t). \tag{20}$$

Отсюда и [1]

$$\det H(t) \neq 0, \quad \forall t \in \partial G \tag{21}$$

является необходимым и достаточным условием для нётеровости оператора T (16). В силу (11), (8) и (5) условие (21) равносильно условию (18).

Далее, имея [1] для индекса χ оператора T формулу

$$\chi = \frac{1}{2\pi}\Delta\big|_{\partial G} \arg \frac{\det\left(\alpha^*(t) - i\pi\beta^*(t)\right)}{\det\left(\alpha^*(t) + i\pi\beta^*(t)\right)}$$

из (20) и (21), получаем (19). Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. 2-е изд. М. : Наука, 1970. 380 с.
2. *Кусковский Л. Н.* О краевой задаче типа Римана — Гильберта // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11, № 3. С. 523—532.
3. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. М. : Высш. шк., 1982. 271 с.
4. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М. : Высш. шк., 1977. 431 с.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. М. : Наука, 1968. 512 с.

УДК 513.64

С. И. Хашин, Ю. А. Хашина

СВОЙСТВА ЧИСЕЛ, ПСЕВДОПРОСТЫХ ПО ФРОБЕНИУСУ

Не существует чисел, меньших 2^{60}, псевдопростых по Фробениусу (FPP). Есть гипотеза, что их не существует вообще. Если эта гипотеза верна или хотя бы их нижняя граница будет существенно поднята, это позволит намного облегчить проверку чисел на простоту.

В работе доказываются некоторые свойства FPP-чисел.

Ключевые слова: псевдопростые числа, алгоритм Фробениуса.

There are no Frobenius pseudoprime numbers (FPP) less than 2^{60}. There is a hypothesis that they do not exist at all. If this hypothesis is true, or, at least, the lower bound will be substantially increased, this will make it much easier to check for prime numbers.

In the paper we prove some properties of the FPP numbers.

Key words: pseudoprime numbers, Frobenius algorithm.

1. Введение

Наиболее мощный среди элементарных вероятностных методов проверки чисел на простоту — тест Фробениуса [1—5].

Определение 1. Нечетное составное число \$n\$ называется псевдопростым по Фробениусу (Frobenius pseudoprimes, FPP), если оно не является полным квадратом и

$$(1+\sqrt{c})^n \equiv 1-\sqrt{c} \bmod n,$$

где c — наименьшее нечетное простое число такое, что символ Якоби $J(c/n)$ равен –1. Про такие числа будем говорить, что они принадлежат классу $FPP(c)$.

В работе [5] доказано, что не существует FPP, меньших 2^{60}. Есть гипотеза, что их не существует вообще. Если эта гипотеза верна или хотя бы их нижняя граница будет существенно поднята, это позволит сделать проверку чисел на простоту гораздо более эффективной.

Так как числа FPP(c) по определению являются составными, они раскладываются в произведение нескольких простых чисел. Символ Якоби $J(c/p)$ для каждого из сомножителей равен ±1. В [5] доказано, что сомножители, для которых $J(c/p) = +1$, должны обладать очень специальными свойствами, причем все такие числа не меньше 2^{34}, вполне вероятно, что таких чисел не существует вовсе. Здесь мы рассматриваем лишь разложение на множители p_i, для каждого из которых $J(c/p) = -1$.

Также получены некоторые ограничения на свойства таких сомножителей, что позволяет надеяться на существенное поднятие нижней границы FPP-чисел.

Основными результатами являются теоремы 3, 5, 6.

2. Свойства нечетных разложений FPP

В [5] доказано, что если n принадлежит классу FPP(c) и $n=pq$, где p — простое и $J(c/p) = -1$, то

$$(1+\sqrt{c})^{q-1} \equiv 1 \bmod p. \tag{1}$$

Так как $J(c/p) = -1$, кольцо $\mathbf{Z}_p[\sqrt{c}]$ изоморфно полю Галуа $GF(p^2)$. Мультипликативная группа поля $GF(p^2)^*$ имеет мощность p^2-1, поэтому порядок любого элемента является делителем p^2-1.

Для простого числа p такого, что $J(c/p) = -1$, обозначим через $r(p)$ копорядок числа $z=1+\sqrt{c}$ в кольце $\mathbf{Z}_p[\sqrt{c}]$, т. е.

$$r(p) = \frac{p^2-1}{\mathrm{ord}(z,p)}.$$

Пусть n является произведением s простых: $n = p_1p_2...p_s$, и все символы Якоби $J(c/p_i)$ равны –1. Тогда согласно (1) будем иметь

$$z^{\frac{n}{p_i}-1} \equiv 1 \bmod p_i$$

при $i = 1, \ldots, s$, или

$$\frac{n}{p_i} \equiv 1 \bmod \mathrm{ord}(z,p_i).$$

Другими словами,

$$\frac{n}{p_i} - 1 = \alpha_i \frac{p_i^2-1}{r(p_i)}$$

для некоторых натуральных α_i. Такие разложения будем называть нечетными.

Определение 2. Набор рациональных чисел

$$\left(\frac{\alpha_1}{r(p_1)}, \dots, \frac{\alpha_s}{r(p_s)}\right)$$

будем называть типом разложения $n=p_1p_2...p_s$.

Теорема 3. Пусть $\left(\frac{\alpha_1}{r(p_1)}, \dots, \frac{\alpha_s}{r(p_s)}\right)$ — тип разложения $n=p_1p_2...p_s$. Тогда $\alpha_i \neq r(p_i)$ при всех i. Другими словами, тип разложения не может содержать единиц.

Доказательство. Если $\alpha_i = r(p_i)$, то $n/p_i - 1 = p_i^2 - 1$, или $n/p_i = p_i^2$ — противоречие.

Теорема 4. Пусть n является произведением 3 простых: $n = p_1p_2p_3$, причем все символы Якоби $J(c/p_i)$ равны –1 и

$$\left(\frac{\alpha_1}{r(p_1)}, \frac{\alpha_2}{r(p_2)}, \frac{\alpha_3}{r(p_3)}\right)$$

— тип разложения. Обозначим через R наименьшее из p_i. Тогда число

$$A = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{r(p_1)r(p_2)r(p_3)}$$

лежит в пределах от 1 до $R^2/(R^2 - 1)$.

Доказательство. Перемножив равенства

$$p_2p_3 - 1 = \alpha_1\frac{p_1^2 - 1}{r(p_1)}, \quad p_1p_3 - 1 = \alpha_2\frac{p_2^2 - 1}{r(p_2)}, \quad p_1p_2 - 1 = \alpha_3\frac{p_3^2 - 1}{r(p_3)},$$

получим

$$(p_2p_3 - 1)(p_1p_3 - 1)(p_1p_2 - 1) = A(p_1^2 - 1)(p_2^2 - 1)(p_3^2 - 1).$$

Если ввести обозначение $x_i = 1/p_i$, то будем иметь

$$(1 - x_1x_2)(1 - x_2x_3)(1 - x_1x_3) = A(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2),$$

или

$$A = \frac{(1 - x_1x_2)(1 - x_2x_3)(1 - x_1x_3)}{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2)}.$$

Величину A можно представить в виде

$$A = 1 + \frac{(1 - x_3^2)(x_1 - x_2)^2 + (1 - x_2^2)(x_3 - x_1)^2 + (1 - x_1^2)(x_2 - x_3)^2}{2(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2)},$$

поэтому $A \geq 1$. При $0 < x_i \leq 1/R$ наибольшего значения функция A достигает, когда одна или две из переменных принимают значение $1/R$, а остальные (оставшаяся) — ноль, и это значение равно $1/(1 - 1/R^2)$. Отсюда и получаем требуемое.

Фактически мы доказали, что если n не имеет малых простых делителей и числа $r(p_i)$ не слишком велики, то $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = r(p_1)r(p_2)r(p_3)$.

Теорема 5. Пусть n является произведением 3 простых: $n=p_1p_2p_3$, причем все символы Якоби $J(c/p_i)$ равны –1. Тогда тип разложения не может содержать двух одинаковых чисел.

Доказательство. Предположим противное. Пусть, например, $\alpha_1/r(p_1) = \alpha_2/r(p_2)$ = s. Имеем

$$p_2p_3 - 1 = s(p_1^2 - 1),\ p_1p_3 - 1 = s(p_2^2 - 1). \tag{2}$$

Из первого равенства получаем

$$p_3 = \frac{s(p_1^2 - 1) + 1}{p_2}.$$

Подставив это выражение во второе равенство из (2), получим

$$s(p_1^2 + p_1p_2 + p_2^2 - 1) + 1 = 0$$

— противоречие.

Теорема 6. Пусть n является произведением 3 простых: $n = p_1p_2p_3$, причем все символы Якоби $J(c/p_i)$ равны –1 и (s_1,s_2,s_3) — тип разложения. Тогда произведение $s_1s_2s_3$ не может равняться 1.

Доказательство. Пусть $s_1s_2s_3 = 1$. Мы имеем три уравнения:

$$\begin{aligned} f_1 &= p_2p_3 - 1 - s_1(p_1^2 - 1), \\ f_2 &= p_1p_3 - 1 - s_2(p_2^2 - 1), \\ f_3 &= p_1p_2 - 1 - s_3(p_3^2 - 1). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\big((1 - s_3)p_3 - (1 - s_2)p_2\big)f_1 + \\ &+s_1\big((1 - s_3)p_1 - s_3(1 - s_2)p_3\big)f_2 + \\ &+s_1\big((1 - s_3)s_2p_2 - (1 - s_2)p_1\big)f_3 = \\ &= \frac{s_1^2s_2 + s_1s_2^2 - 3s_1s_2 + 1}{s_1s_2}(p_2 - p_3). \end{aligned}$$

Так как первый сомножитель отличен от нуля, получаем $p2 = p3$ — противоречие.

Следствие 7. В тех же обозначениях, если $p_1>p_2>p_3$, то

$$1 < s_1s_2s_3 < p_3^2/(p_3^2-1).$$

Теорема 8. В условиях теоремы 6, если $p_1 > p_2 > p_3$, то $p_3 > s_1p_1$.

Доказательство. Если бы $p_3 < s_1p_1$, то, т. к. $p_2p_3-1 = s_1\ (p_1^2-1)$, мы получили бы $p_2 > p_1$ — противоречие.

3. Заключение

Для разработки более эффективных методов проверки простоты чисел желательно либо найти пример FPP-чисел, либо доказать, что их не существует, либо значительно поднять их нижнюю границу. На сегодняшний день в криптографии используются простые числа размером до 2^{1000}, а доказанная нижняя граница FPP-чисел равна 2^{60}. Совместное использование теорем 4 и 6 позволит значительно поднять эту границу.

Библиографический список

1. *Хашин С. И.* Кратные множители псевдопростых чисел // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 102—107.
2. *Crandall R. E., Pomerance C.* Prime Numbers : a Computational Perspective. 2nd ed. New York, etc. : Springer, 2005. 597 p.
3. *Damgard I. B., Frandsen G. S.* An extended quadratic Frobenius primality test with average- and worst-case error estimate // J. of Cryptology. 2006. Vol. 19, № 4. P. 489—520.
4. *Grantham J.* Frobenius pseudoprimes // Math. of Comp. 2000. Vol. 70, № 234. P. 873—891.
5. *Khashin S. I.* Counterexamples for Frobenius primality test // arXiv: abs/1307.7920.2013. URL: http://arxiv.org (дата обращения: 01.12.2013).

УДК: 512.544, 512.546, 512.582

Н. И. Яцкин

ФУНКТОРЫ ПОДГРУППОВОЙ ТОПОЛОГИЗАЦИИ ГРУПП

Рассматриваются функторы топологизации, действующие из категории групп в полную подкатегорию категории топологических групп, объектами которой служат группы, наделенные подгрупповыми топологиями, т. е. обладающие базисом окрестностей нейтрального элемента, составленным из нормальных подгрупп. Изучается соответствие между такими функторами и некоторыми абстрактными классами групп.

Ключевые слова: категория групп, подгрупповая топология, функтор подгрупповой топологизации, абстрактный класс групп, псевдомногообразие групп, радикальный класс групп, полупростой класс групп.

We consider the topologization functors acting from the category of groups into the full subcategory of the category of topological group whose objects are groups with subgroup topologies. We study the correspondence between such functors and some abstract classes of groups.

Key words: category of groups, topologization functor, abstract class of groups, pseudovariety of groups, radical class of groups, semisimple class of groups.

1. Введение. В теории *абелевых* групп значительный интерес, начиная с работы Б. Шарля [16] (1964), вызывают так называемые *функториальные топологии* (т. е. фактически — функторы из категории абелевых групп в категорию топологических абелевых групп, тождественные на морфизмах). Функторы такого типа определенным образом наделяют каждую из абелевых групп топологией, причем так, что все гомоморфизмы групп становятся непрерывными (в смысле введенных топологий). Понятие функториальной топологии упоминается в монографии Л. Фукса [19, § 7] (1970). Этапными в изучении функторов топологизации абелевых групп представляются работы [15, 18, 17] (1980, 1982, 2011).

В настоящей статье предпринимается попытка перенести некоторые из результатов, полученных в указанных выше (и других) работах, на категорию *всех* групп. При этом мы ограничиваемся так называемыми *подгрупповыми* топологиями, которые характеризуются тем, что для них существует *базис* окрестностей нейтрального элемента, состоящий из *нормальных подгрупп*.

«Неабелево обобщение» известных результатов о функторах топологизации, полученных для абелевых групп, оказывается достаточно нетривиальным. В частности, существенно используется теория радикальных классов групп (см. работы А. Г. Куроша, Б. И. Плоткина и др. [4, 8, 9, 10, 12], а также более новые публикации Б. Гарднера [20, 21]).

Основными результатами настоящей работы можно считать теоремы 1—3, связывающие функторы топологизации с определенными (*абстрактными*) классами групп. Всякий функтор задает два класса групп, *дискрет* и *индискрет*, состоящих (соответственно) из тех групп, на которых этот функтор наводит дискретную и индискретную (слабейшую) топологии. Обратно, по заданным абстрактным классам групп, удовлетворяющим некоторым условиям замкнутости, восстанавливаются (хотя и не вполне однозначно) функторы топологизации на категории групп.

2. Топологические NS-группы. Как хорошо известно, структура топологической группы (G,τ) может быть однозначно определена заданием какого-либо базиса $\mathcal{B}$ фильтра $\mathcal{U}$ окрестностей нейтрального элемента. Базис $\mathcal{B}$ обязан удовлетворять нескольким условиям (см. [22, теорема 4.5]). Условия эти будут автоматически соблюдены, если в качестве базисных окрестностей выбираются нормальные подгруппы группы G. Такие топологии принято называть *подгрупповыми*.

Определение 1. Топологическую группу (G,τ), наделенную подгрупповой топологией τ, т. е. обладающую базисом окрестностей нейтрального элемента, составленным из нормальных подгрупп, будем называть **NS**-*группой*.

Замечание 1. Мы имеем в виду выражение «normal subgroups neighborhood system», но отказываемся от удвоения аббревиатуры **NS**. Похожее сокращение, SNS-groups, использовалось в работе [24]. Метку **NS** будем относить не только к группе G, но и к заданной на ней топологии τ, называя ее **NS**-*топологией*. Базис $\mathcal{B}$ фильтра $\mathcal{U}$ окрестностей единицы, составленный из нормальных подгрупп данной группы G, всегда может быть расширен до фильтра $\mathcal{F}$ в частично упорядоченном (ч.у.) множестве $\mathcal{N}$ всех нормальных подгрупп группы G; при этом $\mathcal{F}$ остается фильтровым базисом в ч.у. множестве всех подмножеств в группе G. Будем называть фильтр $\mathcal{F}$ *определяющим* для **NS**-группы (G,τ).

Пример 1. Тривиальные примеры **NS**-топологий: 1) сильнейшая (*дискретная*) топология δ; $\mathcal{F}=\mathcal{N}$; $\mathcal{B}=\{E\}$, где $E=\{1\}$; 2) слабейшая (*индискретная*) топология ι; $\mathcal{F}=\{G\}$. *Коконечная* топология γ на произвольной группе G порождается всеми нормальными подгруппами *конечного индекса*; $\mathcal{F}=\mathcal{N}_f=\{N\in\mathcal{N}:[G:N]<\infty\}$. Используется и другой термин — *проконечная* топология, или же, с необходимым уточнением (см. [25, p. 75]), — *полная проконечная* (full profinite). В случае хаусдорфовости топологии γ топологическая группа (G,γ) допускает *проконечное пополнение* (profinite completing), т. е. плотное вложение в *проконечную группу* (проективный предел конечных групп).

Фильтровые базисы могут порождаться с помощью более узких совокупностей — *предбазисов*. Для **NS**-топологии в качестве предбазиса определяющего фильтра $\mathcal{F}$ может фигурировать произвольное семейство нормальных подгрупп $\mathcal{P}$. Всевозможные конечные пересечения подгрупп, принадлежащих $\mathcal{P}$, составят базис $\tilde{\mathcal{P}}=\mathcal{B}$ фильтра $\mathcal{F}$. Соответствие $\tau \leftrightarrows \mathcal{F}$ между ч.у. множеством всех подгрупповых топологий на группе G и ч.у. множеством всех фильтров в $\mathcal{N}$ является (решеточным) изоморфизмом. Подгрупповые топологии на данной группе G (фильтры в $\mathcal{N}$) образуют (см. [14, 24]) *полную* решетку.

Инфимум $\tau_* = \wedge_{i\in I}\tau_i$ семейства подгрупповых топологий описывается с помощью пересечения определяющих фильтров $\mathcal{F}_* = \cap_{i\in I}\mathcal{F}_i$; *супремум* (*джойн*) $\tau^* = \vee_{i\in I}\tau_i$ — с помощью джойна $\mathcal{F}^* = \vee_{i\in I}\mathcal{F}_i$, предбазисом которого служит объединение фильтров $\cup_{i\in I}\mathcal{F}_i$; базис $\mathcal{F}^*$ составляют всевозможные конечные пересечения вида $H_{i_1}\cap\ldots\cap H_{i_p}$, где H_{i_k} ($k=1,\ldots,p$) пробегает фильтр $\mathcal{F}_{i_k}$ (или, что достаточно, базис этого фильтра).

Пусть далее G — произвольная группа, (K,τ) — топологическая **NS**-группа (с определяющим фильтром $\mathcal{F}$), $\varphi: G\to K$ — некоторый гомоморфизм; прообраз $\varphi^{-1}(\tau)$ также будет **NS**-топологией; для нее определяющий фильтр $\varphi^{-1}(\mathcal{F})$ порождается базисом $\mathcal{B}=\{\varphi^{-1}(F): F\in\mathcal{F}\}$. Топология $\varphi^{-1}(\tau)$ является *слабейшей* из топологий на G, обеспечивающих непрерывность φ. В частности, для гомоморфизма вложения $\alpha: G'\to G$ произвольной подгруппы G' в **NS**-группу G мы получаем, что индуцированная топология $\tau'=\alpha^{-1}(\tau)$ на G' также относится к классу **NS**; соответствующий фильтр порождается базисом $\mathcal{B}'=\{F\cap G': F\in\mathcal{F}\}$. Более общим образом, семейство (возможно, даже собственный класс) гомоморфизмов $\varphi_i: G\to K_i$ ($i\in I$), действующих из G в **NS**-группы (K_i,τ_i), с определяющими фильтрами $\mathcal{F}_i$, задает на группе G *инициальную* **NS**-топологию τ^* как *супремум* семейства топологий $\varphi_i^{-1}(\tau_i)$, или, что равносильно, как *слабейшую* из таких топологий на G, относительно которых все гомоморфизмы φ_i непрерывны. Определяющий фильтр $\mathcal{F}^*$ для топологии τ^* порождается *базисом*, состоящим из всевозможных пересечений вида $H_{i_1}\cap\ldots\cap H_{i_p}$, где $H_{i_k}=\varphi_{i_k}^{-1}(F_{i_k})$ и F_{i_k} пробегает $\mathcal{F}_{i_k}$.

Переходим к описанию образа **NS**-топологии и финальных **NS**-топологий. Пусть G — группа, (L,τ) — топологическая **NS**-группа (с определяющим фильтром $\mathcal{F}$), $\varphi: L\to G$ — гомоморфизм. *Образ* $\varphi(\tau)$ также является **NS**-топологией, определяемой фильтром $\varphi(\mathcal{F})$, который порождается базисом $\mathcal{B}=\{\varphi(F)^G: F\in\mathcal{F}\}$, составленным из *нормальных оболочек* образов подгрупп $F \in \mathcal{F}$. Иначе говоря, нормальная подгруппа $N \trianglelefteq G$ тогда и только тогда принадлежит $\mathcal{B}$, когда ее прообраз $\varphi^{-1}(F)$ принадлежит $\mathcal{F}$. Топология $\varphi(\tau)$ является *сильнейшей* из топологий на G, обеспечивающих непрерывность φ. В частности, для гомоморфизма проектирования $\pi : G \to G^{\wedge}$ **NS**-группы G на фактор-группу $G^{\wedge} = G / H$ (где $H \trianglelefteq G$) мы получаем, что *фактор-топология* $\tau^{\wedge} = \pi(\tau)$ также относится к классу **NS** и порождается базисом $\mathcal{B} = \{FH / H : F \in \mathcal{F}\}$. Эпиморфизм π оказывается при этом не только непрерывным (в смысле топологий τ и $\tau^{\wedge}$), но и *открытым* отображением. Более общим образом, семейство (возможно, даже собственный класс) гомоморфизмов $\varphi_i : L_i \to G$, действующих из **NS**-групп (L_i, τ_i) в группу G, определяет на G *финальную* **NS**-топологию τ_* как *инфимум* семейства топологий $\varphi_i(\tau_i)$, или, что равносильно, как *сильнейшую* из таких топологий на G, относительно которых все гомоморфизмы φ_i непрерывны. Определяющий фильтр $\mathcal{F}_*$ для топологии τ_* задается как пересечение всех фильтров $\mathcal{F}_i$, каждый из которых строится по базису $\mathcal{B}_i = \{\varphi(F_i)^G : F_i \in \mathcal{F}_i\}$. Другое описание: нормальная подгруппа $N \trianglelefteq G$ тогда и только тогда принадлежит $\mathcal{F}_*$, когда для любого $i \in I$ прообраз $\varphi_i^{-1}(N)$ принадлежит $\mathcal{F}_i$.

На *декартовом* произведении $G = \Pi_{i \in I} G_i$ **NS**-групп (G_i, τ_i) инициальная топология τ^* строится как слабейшая из обеспечивающих непрерывность всех проекций $\pi_i : G \to G_i$; она порождается базисом $\mathcal{B}^*$, состоящим из всевозможных конечных пересечений вида $\pi_{i_1}^{-1}(F_{i_1}) \cap \ldots \cap \pi_{i_p}^{-1}(F_{i_p})$, где каждая подгруппа F_{i_k} пробегает определяющий фильтр $\mathcal{F}_{i_k}$ для топологии τ_{i_k}. Иначе элементы базиса $\mathcal{B}^*$ можно описать как *большие ящики*, т. е. произведения вида $\Pi_{i \in I} F_i$, где *почти все* (все, кроме конечного числа) подгруппы F_i максимальны (совпадают с группой G_i). Это — обычная (*тихоновская*) топология произведения. Финальная топология τ_* на произведении G определяется как сильнейшая из обеспечивающих непрерывность всех вложений $\alpha_i : G_i \to G$; соответствующий фильтр состоит из таких нормальных подгрупп $N \trianglelefteq G$, для которых каждая из подгрупп-прообразов $F_i = \alpha_i^{-1}(N)$ принадлежит $\mathcal{F}_i$. Это равносильно тому, что N содержит некоторое объединение образов $\cup_{i \in I} F_i$, нормальной оболочкой которого является *ящик* $\Pi_{i \in I} F_i$, уже произвольный (не обязательно большой). Обе топологии, тихоновская τ^* и *ящичная* τ_*, по построению относятся к типу **NS**; τ_* мажорирует τ^*; в случае конечного произведения они совпадают.

Напомним для дальнейшего использования некоторые элементарные факты из теории топологических групп. В любой топологической группе

(G,τ) замыкание $\mathbf{cl}_\tau(M)$ произвольного подмножества $M \subseteq G$ может быть выражено формулой $\mathbf{cl}_\tau(M) = \cap_{N\in\mathcal{B}} MN$, где $\mathcal{B}$ — базис фильтра окрестностей нейтрального элемента. Замыкание (нормальной) подгруппы снова является (нормальной) подгруппой, замыкание тривиальной подгруппы $\mathbf{A}(G,\tau) = \mathbf{cl}_\tau(E) = \cap_{N\in\mathcal{B}} N$ — наименьшей замкнутой нормальной подгруппой в G; тривиальность $\mathbf{A}(G,\tau)$ является критерием *хаусдорфовости* топологической группы. В случае **NS**-групп каждая из нормальных групп, входящих в определяющий фильтр $\mathcal{F}$, является *открыто-замкнутой*. Выделяется следующий специфический класс **NS**-топологий.

Определение 2. **NS**-топология на группе называется *цокольной*, если она имеет одноэлементный базис $\mathcal{B}=\{S\}$, где S — нормальная подгруппа, называемая (топологическим) *цоколем*.

Цоколь является наименьшей окрестностью единицы. К числу цокольных топологий могут быть отнесены индискретная (цоколь совпадает со всей группой) и дискретная (цоколь тривиален). За исключением последнего случая цокольная топология не может быть хаусдорфовой. Гомоморфизм $\varphi: G \to G'$ групп с цокольными топологиями (и цоколями S и S' соответственно) *непрерывен* (непрерывен и *открыт*) тогда и только тогда, когда $\varphi(S) \subseteq S'$ (соответственно $\varphi(S) = S'$).

3. Функторы подгрупповой топологизации. Примем следующие обозначения: **Gr** — категория групп, $\mathcal{G}$ — класс объектов этой категории (т. е. класс всех групп), **TopGr —** категория топологических групп, **NSGr** — полная подкатегория в **TopGr**, состоящая из топологических **NS**-групп.

Определение 3. *Функтором топологизации* (*ф.т.*) на категории **Gr** называется произвольный функтор $T: \mathbf{Gr} \to \mathbf{TopGr}$; $G \mapsto T(G) = (G, \tau_G)$, $f \mapsto T(f) = f$, тождественный на морфизмах [$f \in \mathrm{Hom}(G,H)$; $G, H \in \mathcal{G}$]. Иначе говоря, ф.т. T наделяет каждую группу G определенной топологией τ_G так, что все гомоморфизмы оказываются непрерывными. Если при этом во всякой группе наводится подгрупповая (цокольная) топология, то T называется функтором *подгрупповой* (*цокольной*) топологизации.

Непосредственным следствием определения 3 является тот факт, что всякий *алгебраический* изоморфизм групп превращается функтором топологизации в *топологический* изоморфизм. Далее, непрерывность произвольного гомоморфизма проектирования $\pi: G \to G^\wedge$ ($G^\wedge = G/H$; $H \trianglelefteq G$) влечет следующее свойство ф.т.: $\tau_{G^\wedge} \subseteq (\tau_G)^\wedge$. Аналогично, непрерывность произвольного вложения $\alpha: G' \to G$ влечет свойство: $\tau_{G'} \supseteq (\tau_G)'$. Укажем на возможность *сравнения* функторов топологизации. Говорят, что ф.т. $T(G) = (G, \tau_G)$ *мажорирует* ф.т. $S(G) = (G, \sigma_G)$ (обозначение: $T \geq S$), если для каждой группы G топология τ_G мажорирует топологию σ_G (т. е. $\tau_G \supseteq \sigma_G$); допустимо другое словоупотребление: функтор S является *подфунктором* функтора T. Заметим также, что ф.т. могут рассматриваться не только на всей категории **Gr**, но и на полных подкатегориях в **Gr**, например на категории **AbGr** абелевых групп. Именно в теории абелевых групп эта тематика зародилась (см. [16, 19]) и достаточно активно развивалась (см. [15, 17, 18, 23]). Есть два варианта усиления определения 3.

Определение 4. Ф.т. $T(G) = (G, \tau_G)$ называется функтором *идеальной* (*наследственной*) топологизации, если для любой группы G и любой фактор-группы $G^\wedge = G/H$ (любой подгруппы $G' \leq G$) выполняется равенство $\tau_{G^\wedge} = (\tau_G)^\wedge$ [$\tau_{G'} = (\tau_G)'$], т. е. если функтор T снабжает всякую фактор-группу *фактор-топологией* (всякую подгруппу *индуцированной* топологией). Будем использовать аббревиатуры: *ф.и.т.*, *ф.н.т.*, *ф.и.н.т.*

Условие идеальности равносильно требованию открытости всевозможных проекций на фактор-группы, что, в свою очередь, влечет уже открытость всех вообще *эпиморфизмов*. Условие наследственности можно выразить так: всякий гомоморфизм вложения $\alpha : G' \to G$ является *гомеоморфизмом* на свой образ. Иначе говоря, ф.н.т. превращает алгебраические вложения подгрупп в *топологические* вложения. Из этого вытекает, что аналогичным свойством обладают вообще все *мономорфизмы*.

Пример 2. Тривиальные примеры ф.т.: каждая группа снабжается дискретной $\Delta(G) = (G, \delta_G)$ или индискретной $\mathrm{I}(G) = (G, \iota_G)$ топологией. Нетривиальный пример — функтор $\Gamma(G) = (G, \gamma_G)$, определяющий в произвольной группе коконечную топологию. Непрерывность гомоморфизмов имеет место, т. к. прообраз нормальной подгруппы конечного индекса снова является нормальной подгруппой конечного индекса. Еще один пример доставляет функтор *степенной* топологизации $\nabla(G) = (G, \nu_G)$, где топология ν_G задается (счетным) базисом, составленным из степенных подгрупп G^n. Функтор ∇ мажорирует функтор Γ, поскольку всякая нормальная подгруппа конечного индекса n в группе G содержит, очевидно, степенную подгруппу G^n. В работе [17] топология ν_G (рассматриваемая на абелевых группах) именуется *естественной* (natural). Каждый из функторов $\Delta, \mathrm{I}, \Gamma, \nabla$ является функтором подгрупповой топологизации; все они являются идеальными, а первые два — наследственными.

Справедливо следующее легко доказываемое

Предложение 1. 1. *Пусть T — ф.т. из* Gr *в* **NSGr**; $G = \Pi_{i \in I} G_i$ — *некоторое декартово произведение;* $\tau_i = \tau_{G_i}$ — *топологии, наводимые функтором T на сомножителях;* $\mathcal{F}_i$ — *соответствующие фильтры нормальных подгрупп;* τ^* *и* τ_* — *тихоновская и ящичная топологии на группе G. Тогда топология* τ_G*, наводимая функтором T на G, удовлетворяет условиям* $\tau^* \subseteq \tau_G \subseteq \tau_*$.

2. *Если T является подфунктором функтора* Γ *коконечной топологизации, то первое включение обращается в равенство.*

3. *В случае конечного произведения (для любого ф.т. T) все три рассматриваемые топологии на G совпадают.*

4. Абстрактные классы групп. Некоторый (непустой) класс групп $\mathcal{C}$ принято называть *абстрактным*, если выполнено условие: **(A₁)** $\mathcal{C}$ *изоморфно замкнут*. Абстрактными являются класс $\mathcal{G}$ всех групп и класс тривиальных групп $\mathcal{E}$. В данной работе мы будем дополнительно предполагать, что абстрактный класс удовлетворяет условию: **(A_2)** $\mathcal{C}$ *содержит единичную группу* (т. е. включает в себя $\mathcal{E}$). С каждым абстрактным классом групп $\mathcal{C}$ и с каждой группой G свяжем следующие семейства подгрупп: 1) семейство $\mathcal{C}$*-подгрупп* $\mathcal{C}(G)$, состоящее из всех подгрупп в G, принадлежащих классу $\mathcal{C}$; оно непусто, поскольку содержит единичную подгруппу, входящую в $\mathcal{C}$ в силу **(A_2)**; 2) подсемейство $\mathcal{C}_*(G)$, состоящее из всевозможных *нормальных* $\mathcal{C}$*-подгрупп* (очевидно, также непустое); 3) семейство *ко-*$\mathcal{C}$*-подгрупп* $\mathcal{C}^*(G)$, состоящее из всех *нормальных* подгрупп $H \trianglelefteq G$ таких, что соответствующая фактор-группа G/H принадлежит классу $\mathcal{C}$; это семейство непусто, поскольку, снова в силу **(A_2)**, содержит $H = G$. Названия второго и третьего семейств выбраны в соответствии с терминологией [8, 9]; см. также [2]. Введем ряд определений и обозначений. Пусть $\mathcal{C}$ — абстрактный класс групп, G — группа.

Определение 5. 1. $\mathcal{C}$*-радикалом* G называется *порождение* (*произведение*) всех *нормальных* $\mathcal{C}$-подгрупп: $\mathbf{rad}_{\mathcal{C}}(G) = \langle \cup_{N \in \mathcal{C}_*(G)} N \rangle = \Pi_{N \in \mathcal{C}_*(G)} N$.

2. *Широким* $\mathcal{C}$*-радикалом* G называется *нормальное порождение* всех (необязательно нормальных) $\mathcal{C}$-подгрупп (произведение *нормальных оболочек* всех $\mathcal{C}$-подгрупп): $\mathbf{Rad}_{\mathcal{C}}(G) = \langle \cup_{H \in \mathcal{C}(G)} H \rangle^G = \Pi_{H \in \mathcal{C}(G)} H^G$.

3. $\mathcal{C}$*-корадикалом* G называется *пересечение* всех ко-$\mathcal{C}$-подгрупп: $\mathbf{corad}_{\mathcal{C}}(G) = \cap_{N \in \mathcal{C}^*(G)} N$.

Замечание 2. Мы связываем понятия радикалов и корадикала группы с *произвольным* абстрактным классом групп $\mathcal{C}$. Специфические свойства радикала, открытые в работах А. Г. Куроша и других, имеют место при дополнительном предположении *радикальности* класса $\mathcal{C}$ (см. ниже определение 7 и замечание 5).

Поскольку всякий автоморфизм группы G задает биекцию каждого из семейств $\mathcal{C}(G)$, $\mathcal{C}_*(G)$ и $\mathcal{C}^*(G)$ на себя, радикалы **rad** и **Rad**, а также корадикал **corad** оказываются *характеристическими* подгруппами.

По каждому абстрактному классу групп $\mathcal{C}$ можно построить три новых класса групп.

Определение 6. 1. Класс $\mathcal{C}^\circ$ *анти-*$\mathcal{C}$*-групп* (класс $\mathcal{C}^\varnothing$ *строго анти-*$\mathcal{C}$*-групп*) состоит из групп, удовлетворяющих условию $\mathbf{rad}_{\mathcal{C}}(G) = E$ (соответственно $\mathbf{Rad}_{\mathcal{C}}(G) = E$).

2. Класс $\mathcal{C}^\perp$ *контр-*$\mathcal{C}$*-групп* содержит группы, для которых $\mathbf{corad}_{\mathcal{C}}(G) = G$.

Все три новых класса, $\mathcal{C}^\circ, \mathcal{C}^\varnothing, \mathcal{C}^\perp$, являются абстрактными и содержат единичную группу.

Пример 3. Обозначим Φ класс всех конечных подгрупп. Семейства $\Phi(G)$ и $\Phi_*(G)$ составляют соответственно все конечные и все конечные нормальные подгруппы в G. Семейство $\Phi^*(G)$ состоит из *коконечных* подгрупп (нормальных подгрупп конечного индекса). Класс Φ° *антиконечных* групп состоит из таких групп, в которых нет нетривиальных конечных нормальных подгрупп. Более узкий класс $\Phi^\varnothing$ *строго антиконечных* групп содержит группы, не имеющие никаких нетривиальных конечных подгрупп. Класс *контрконечных* групп $\Phi^\perp$ состоит из групп, в которых отсутствуют истинные коконечные подгруппы. Заметим, что здесь наше словоупотребление расходится с терминологией работы [21], в которой антиконечными называются как раз те группы, за которыми мы закрепляем термин «контрконечные». Вообще, класс $\Phi^\perp$ получил от множества пользователей множество названий; например, в книге [11, с. 85] группы этого класса именуются *квазиполными*.

Приведем далее список типичных свойств *замкнутости* для абстрактных классов групп, следуя, в основном, терминологии монографии [25] (см. также работу [2]). Класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно: **(C$_0$)** *нормальных подгрупп*, **(C$_1$)** *подгрупп*, **(C$_2$)** *гомоморфных образов*, **(C$_3$)** *конечных прямых произведений*, **(C$_4$)** *конечных подпрямых произведений*, **(C$_5$)** *расширений*, **(C$_6$)** *аппроксимаций*. Условие **(C$_1$)** влечет, очевидно, **(C$_0$)** и **(A$_2$)**; **(C$_2$)** влечет **(A$_1$)**; **(C$_1$)** вместе с **(C$_3$)** влекут **(C$_4$)**; **(C$_5$)** влечет **(C$_3$)**. Класс $\mathcal{C}$ называется *псевдомногообразием*, если выполнены условия **(C$_1$)** — **(C$_3$)**.

Условие **(C$_6$)** означает, что всякая группа, аппроксимируемая группами из класса $\mathcal{C}$, т. е. (см. [3, с. 57; 6, с. 49] или, в более общем контексте, [13]) являющаяся поддекартовым произведением $\mathcal{C}$-групп, сама принадлежит этому классу. То же самое можно выразить в виде равенства классов $\mathcal{C}={}_R\mathcal{C}$, где в правой части фигурирует класс $\mathcal{C}$-аппроксимируемых групп. Класс ${}_R\mathcal{C}$ замкнут относительно аппроксимаций (при любом классе $\mathcal{C}$). Антиподом свойства **(C$_6$)** является свойство *плотности* класса: ${}_R\mathcal{C}=\mathcal{G}$ (всякая группа $\mathcal{C}$-аппроксимируема). Известен критерий: класс плотен тогда и только тогда, когда он содержит класс монолитических групп. (Группа называется *монолитической* (см. [7, с. 173]), если пересечение всех ее нетривиальных нормальных подгрупп является нетривиальной подгруппой, именуемой *монолитом*.) Классы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{E}$, а также класс конечных групп Φ удовлетворяют всем условиям **(C$_0$)** — **(C$_6$)**.

Переходим к более сложным условиям, связанным с теорией радикалов в категории групп (см. классические работы А. Г. Куроша и учеников [4, 5, 10, 12]).

Определение 7. 1. Абстрактный класс групп $\mathcal{R}$ называется *радикальным*, если для него выполнены условия **(C$_2$)**, **(C$_5$)** и **(R)** *$\mathcal{R}$-радикал произвольной группы является $\mathcal{R}$-группой;* если, кроме того, выполнено условие **(R$_1$)** *во всякой группе нормальная оболочка любой $\mathcal{R}$-подгруппы является $\mathcal{R}$-подгруппой*, то класс $\mathcal{R}$ называется *строго радикальным*.

2. *Абстрактный* класс групп $\mathcal{S}$ называется *полупростым*, если выполнены условия **(C$_0$)**, **(C$_5$)** и **(C$_6$)**; если при этом условие **(C$_0$)** заменяется на более сильное **(C$_1$)**, то класс $\mathcal{S}$ называется *строго полупростым*.

Далее следует очень краткий обзор основных результатов теории групповых радикалов. Радикальные и полупростые классы групп встречаются попарно. Каждый радикальный класс $\mathcal{R}$ состоит из тех и только тех групп, которые совпадают со своим $\mathcal{R}$-радикалом, и однозначно определяет соответствующий полупростой класс: $\mathcal{S}=\{G\in\mathcal{G}:\mathbf{rad}_{\mathcal{R}}(G)=E\}$; $\mathcal{S}$-корадикал совпадает с $\mathcal{R}$-радикалом: $\mathbf{corad}_{\mathcal{S}}(G)=\mathbf{rad}_{\mathcal{R}}(G)$. Фактор-группа произвольной группы по ее $\mathcal{R}$-радикалу полупроста (принадлежит описанному выше классу $\mathcal{S}$), причем радикал является наименьшей из таких нормальных подгрупп, факторы по которым полупросты. Обратно, каждый полупростой класс $\mathcal{S}$ состоит из групп с тривиальным $\mathcal{S}$-корадикалом и однозначно определяет «парный» радикальный класс: $\mathcal{R}=\{G\in\mathcal{G}:\mathbf{corad}_{\mathcal{S}}(G)=G\}$. Если $(\mathcal{R},\mathcal{S})$ есть пара соответствующих друг другу классов (радикальный и полупростой), то всякая группа G однозначно представляется в виде расширения $\mathcal{R}$-группы $R=\mathbf{rad}_{\mathcal{R}}(G)$ с помощью $\mathcal{S}$-группы $S=G/R$. Строгая радикальность радикального класса $\mathcal{R}$ равносильна строгой полупростоте соответствующего полупростого класса $\mathcal{S}$.

Замечание 3. Наше условие строгой радикальности **(R$_1$)** отличается от условия А. Г. Куроша [4]: **(R$_2$)** *для любой группы G радикал* $\mathbf{rad}_{\mathcal{R}}(G)$ *содержит все* (не только нормальные) $\mathcal{R}$*-подгруппы группы G*. Однако на самом деле эти условия равносильны. Действительно, импликация **(R$_1$)** $\Rightarrow$ **(R$_2$)** очевидна; обратная импликация доказывается следующим образом. Пусть $A\le G$, $A\in\mathcal{R}$, $B=A^G$, $R=\mathbf{rad}_{\mathcal{R}}(G)$. Согласно **(R$_2$)** имеем: $A\le R\trianglelefteq G$ и, значит, $B\le R$, кроме того, по построению, $B\trianglelefteq G$. Докажем, что $B\in\mathcal{R}$, или, что равносильно, $R_1=B$, где $R_1=\mathbf{rad}_{\mathcal{R}}(B)$. Снова применяем **(R$_2$)**: $A\le R_1\trianglelefteq B$, причем R_1 является подгруппой, характеристической в B, и, следовательно, нормальной в G; значит, R_1 и B совпадают. Еще один вариант условия строгой радикальности таков: *для любой группы радикал и широкий радикал совпадают*. Строгая радикальность радикального класса $\mathcal{R}$ равносильна строгой полупростоте соответствующего полупростого класса $\mathcal{S}$.

Замечание 4. Строгая радикальность класса практически исключает его *наследственность*; в [20] показано, что строго радикальный класс групп $\mathcal{R}$ удовлетворяет **(C$_1$)** лишь в двух случаях: $\mathcal{R}=\mathcal{E}$ или $\mathcal{R}=\mathcal{G}$.

Замечание 5. В ряде работ (в частности, в [8]) систематически изучались «абстрактные теоретико-групповые функции» (*функториалы*), «функториально сопоставляющие» каждой группе определенную нормальную подгруппу в этой группе. Имеется тесная взаимосвязь между функториалами и классами групп. К числу функториалов относятся различные *предрадикалы* и радикалы, *копредрадикалы* и корадикалы. За счет более широкого понимания терминов (см. замечание 2) мы можем позволить себе отказаться от тонких различий (типа «предрадикал — радикал»), говоря всегда просто о радикалах (корадикалах) и об их общих и специфических свойствах.

Опишем далее простую конструкцию, приводящую к строго радикальным классам.

Предложение 2. *Для любого абстрактного класса групп* $\mathcal{C}$, *удовлетворяющего условию* **(C_0)**, *класс* $\mathcal{R} = \mathcal{C}^{\perp}$ *контр-*$\mathcal{C}$*-групп является радикальным. Если усилить условие* **(C_0)** *до* **(C_1)**, *то* $\mathcal{R}$ *будет строго радикальным классом.*

Доказательство является достаточно прямолинейным и непосредственным и поэтому опускается.

5. От функторов топологизации к классам групп. Следуя идеологии, развиваемой (применительно к категории **AbGr**) в работе [17], введем (но уже применительно к категории **Gr**) понятие эквалайзера для двух ф.т., а также, в качестве частных случаев, понятия дискрета и индискрета для ф.т. (в абелевой ситуации они изучались в работах [15, 18, 23] и назывались соответственно дискретным и индискретным классами групп).

Определение 8. 1. *Эквалайзером* двух функторов топологизации, $T(G) = (G, \tau_G)$ и $S(G) = (G, \sigma_G)$, называется класс таких групп, на которых значения этих функторов идентичны: $\mathbf{Eq}(T, S) = \{G \in \mathcal{G}: \tau_G = \sigma_G\}$.

2. *Дискретом* (*индискретом*) для ф.т. T называется эквалайзер $\mathcal{D}(T) = \mathbf{Eq}(T, \Delta)$ (соответственно $\mathcal{I}(T) = \mathbf{Eq}(T, I)$), где Δ и I — функторы дискретной и индискретной топологизации.

Предложение 3. 1. *Всякий эквалайзер является абстрактным классом групп, содержащим единичную группу, и замкнут относительно конечных прямых произведений.*

2. *Если функторы* T *и* S *оба являются наследственными* (*идеальными*), *то эквалайзер* $\mathbf{Eq}(T, S)$ *замкнут относительно подгрупп* (*гомоморфных образов*).

Доказательство практически очевидно. В той части, которая относится к свойству **(C_3)**, следует использовать предложение 1.

Теорема 1. 1. *Всякий дискрет* $\mathcal{D}(T)$ *удовлетворяет условиям* **(C_1)** *и* **(C_3)**, *а если ф.т.* T *идеален, то и условию* **(C_2)**.

2. *Всякий индискрет* $\mathcal{I}(T)$ *удовлетворяет условиям* **(C_2)**, **(R)** и **(R_1)**; если ф.т. T *идеален, то* $\mathcal{I}(T)$ *удовлетворяет* **(C_5)** *и, следовательно, является строго радикальным классом.*

3. *Если, функтор* T *является не только идеальным, но и наследственным, то либо* (3.1) $\mathcal{I}(T) = \mathcal{G}$ *(и тогда* $T = I$ *), либо* (3.2) $\mathcal{I}(T) = \mathcal{E}$.

Доказательство. 1. По предложению 3 все эквалайзеры (и, в частности, все дискреты) удовлетворяют условию **(C_3)**. Докажем **(C_1)** для произвольного дискрета: пусть $G \in \mathcal{D}(T)$, т. е. $\tau_G = \delta_G$; для любой подгруппы $G' \le G$ топология $\tau_{G'}$ мажорирует топологию $(\tau_G)' = (\delta_G)' = \delta_{G'}$ и, следовательно, $G' \in \mathcal{D}(T)$. Далее, если функтор T идеален и $G \in \mathcal{D}(T)$, то для любой фактор-группы $G^{\wedge} = G/H$ топология $\tau_{G^{\wedge}}$ будет совпадать с фактор-топологией для дискретной топологии и, следовательно, также будет дискретной, тем самым доказано **(C_2)**.

2. Всякий индискрет удовлетворяет **(C_2)**. В самом деле, для $G \in \mathcal{I}(T)$ фактор-топология $(\tau_G)^\wedge$ на $G^\wedge$ индискретна и мажорирует топологию $\tau_{G^\wedge}$; следовательно, последняя также индискретна и $G^\wedge \in \mathcal{I}(T)$. Докажем теперь для индискретов справедливость условия **(R)**. Пусть $K = \Pi_{i \in I} K_i$ — произведение всех индискретных (по функтору T) нормальных подгрупп в группе G. Докажем, что $\tau_K = \iota_K$. Пусть нормальная подгруппа $U \trianglelefteq K$ является окрестностью единицы в смысле τ_K. Тогда каждая из подгрупп $U_i = K_i \cap U$ открыта в индуцированной топологии $(\tau_K)'_i$ на K_i, которая, как известно, минорирует топологию $\tau_{K_i} = \iota_{K_i}$ и, значит, тоже индискретна. Поэтому $U_i = K_i$ (для любого $i \in I$), и, следовательно, $U = K$. Индискретность топологии τ_K доказана. Переходим к доказательству **(R_1).** Пусть для подгруппы $H \le G$ топология τ_H индискретна. Рассмотрим нормальную оболочку $L = H^G$ и докажем, что $\tau_L = \iota_L$. Для любой открытой в смысле τ_L нормальной подгруппы $U \trianglelefteq L$ пересечение $U' = U \cap H$ открыто в индуцированной топологии $(\tau_L)'$ на H, а значит, и в «своей» топологии $\tau_H = \iota_H$. Получаем $U' = H$, и, следовательно, $H \le U \trianglelefteq H^G$. Все сопряженные подгруппы H^g ($g \in G$) алгебраически и топологически изоморфны H и, следовательно, также индискретны (по функтору T). Это позволяет получить включение $H^G \le U$ и затем равенство $U = L$, свидетельствующее об индискретности τ_L. Для доказательства (строгой) радикальности класса $\mathcal{I}(T)$ недостает только **(C_5)** (замкнутости относительно расширений). Вывод этого условия потребует, однако, дополнительного предположения об идеальности функтора. Пусть T является ф.и.т. и пусть по функтору T нормальная подгруппа $H \trianglelefteq L$ и фактор-группа $G^\wedge = G/H$ индискретны. Докажем индискретность топологии τ_G. Возьмем произвольную нормальную подгруппу $U \trianglelefteq G$, являющуюся базисной окрестностью единицы в смысле τ_G. Эта топология индуцирует на H топологию $(\tau_G)'$, минорирующую $\tau_H = \iota_H$ и, следовательно, индискретную. Значит, $U \cap H = H$ и $H \le U$. Эпиморфизм проектирования $\pi : G \to G^\wedge$, в силу идеальности функтора T, открыт (в смысле τ_G и $\tau_{G^\wedge} = \iota_{G^\wedge}$). Поэтому образ $\pi(U) = U/H$ открыт в индискретной группе $G^\wedge$. Значит, $U/H = G/H$ и $U = G$.

3. Если T — наследственный ф.т., то на всякой подгруппе группы с индискретной топологией этот функтор также наводит индискретную топологию. Значит, индискрет $\mathcal{I}(T)$ удовлетворяет **(C_1)**. Но, в соответствии с замечанием 4, только $\mathcal{G}$ и $\mathcal{E}$ являются строго радикальными классами, замкнутыми относительно подгрупп. В первом случае ($\mathcal{I}(T) = \mathcal{G}$) все группы оказываются индискретными, т. е. $T = I$; во втором случае ($\mathcal{I}(T) = \mathcal{E}$) индискретными являются лишь тривиальные группы (однако из этого еще не следует равенство $T = \Delta$). Таким образом, ф.и.н.т. либо совпадает с I, либо имеет тривиальный индискрет.

Пример 4. Для функтора $\varGamma$ дискрет совпадает с классом $\varPhi$ конечных групп, индискрет — с класом $\varPhi^{\perp}$ контрконечных групп. Для функтора ∇ дискрет и индискрет равны соответственно классу групп *конечного периода* и классу групп, *полных по Черникову* (см. [11, с. 85]). Из теоремы 1 следует, в частности, строгая радикальность класса полных по Черникову групп (ср. с примером 4.4 в [21]).

6. От классов групп к функторам топологизации. В этом пункте мы пройдем обратный путь — от классов групп к ф.т. Впрочем, *обратным* он будет, вообще говоря, лишь односторонне — *справа*. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный абстрактный класс групп, а G — произвольная группа.

Определение 8. *Ко-*$\mathcal{C}$*-топологией* ($\mathcal{C}$*-топологией*) на G называется *инициальная* топология $\tau_G^{\mathcal{C}}$ (*финальная* топология ${}^{\mathcal{C}}\tau_G$), определяемая всевозможными эпиморфизмами $\varphi: G \to Y$ (мономорфизмами $\varphi: X \to G$) на группы $Y \in \mathcal{C}$ (групп $X \in \mathcal{C}$), каждая из которых наделяется *дискретной* (*индискретной*) топологией.

6.1. Ко-$\mathcal{C}$**-топология** $\tau_G^{\mathcal{C}}$ порождается *предбазисом* $\mathcal{P}_G^{\mathcal{C}} = \mathcal{C}^*(G)$ окрестностей единицы, составленным из *ядер* всевозможных эпиморфизмов данной группы на $\mathcal{C}$-группы; соответствующий фильтровый *базис* $\mathcal{B}_G^{\mathcal{C}} = \tilde{\mathcal{P}}_G^{\mathcal{C}}$ состоит из всевозможных конечных пересечений ко-$\mathcal{C}$-подгрупп; определяющий фильтр $\mathcal{F}_G^{\mathcal{C}}$ состоит из всевозможных нормальных подгрупп, каждая из которых содержит некоторое конечное пересечение ко-$\mathcal{C}$-подгрупп. Если класс $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию **(C$_4$)**, то $\mathcal{P}_G^{\mathcal{C}} = \mathcal{B}_G^{\mathcal{C}}$; если, кроме того, $\mathcal{C}$ удовлетворяет **(C$_2$)**, то $\mathcal{P}_G^{\mathcal{C}} = \mathcal{B}_G^{\mathcal{C}} = \mathcal{F}_G^{\mathcal{C}}$, т. е. предбазис сам оказывается фильтром в $\mathcal{N}$. В дальнейшем конъюнкцию **(C$_2$)** $\wedge$ **(C$_4$)** мы будем, как правило, заменять на несколько более сильное предположение **(C$_1$)** $\wedge$ **(C$_2$)** $\wedge$ **(C$_3$)**, т. е. будем считать, что $\mathcal{C}$ является *псевдомногообразием*.

Теорема 2. 1. *Если класс групп* $\mathcal{C}$ *удовлетворяет* **(C$_1$)**, *то функтор* $T^{\mathcal{C}}(G) = (G, \tau_G^{\mathcal{C}})$ *является ф.т.*

2. *При дополнительном предположении* **(C$_3$)** *дискрет этого функтора совпадает с исходным классом групп:* $\mathcal{D}(T^{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}$.

3. *Функтор* $T^{\mathcal{C}}$ *минорирует любой ф.т., имеющий тот же дискрет, т. е.* $[\mathcal{D}(T) = \mathcal{C}] \Rightarrow [T^{\mathcal{C}} \le T]$.

4. *В предположении* **(C$_1$)** $\wedge$ **(C$_3$)** *функтор* $T^{\mathcal{C}}$ *является ф.и.т. тогда и только тогда, когда выполнено* **(C$_2$)**.

5. *Ф.и.т. определяется по своему дискрету однозначно.*

Доказательство. 1. Непрерывность всех гомоморфизмов $\varphi: G \to G'$ в смысле ко-$\mathcal{C}$-топологий следует из того, что для любой предбазисной окрестности $K' \in \mathcal{C}^*(G')$ прообраз $K = \varphi^{-1}(K')$ также является ко-$\mathcal{C}$-подгруппой: $G/K \cong \varphi(G)/\varphi(K) \cong \varphi(G)/K' \le G'/K' \in \mathcal{C}$, откуда, в силу **(C$_1$)**, вытекает $G/K \in \mathcal{C}$.

2. Если $G \in \mathcal{C}$, то единичная подгруппа как ядро тождественного автоморфизма является окрестностью единицы, что свидетельствует о дискрет-

ности топологии; так что $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}(T^{\mathcal{C}})$. Докажем обратное включение. Пусть $G \in \mathcal{D}(T^{\mathcal{C}})$. Значит, тривиальная подгруппа E является окрестностью единицы и поэтому должна принадлежать базису $\mathcal{B}_G^{\mathcal{C}}$, или, что, в силу **(C$_3$)**, равносильно, предбазису $\mathcal{P}_G^{\mathcal{C}}$; стало быть, $G \cong G/E \in \mathcal{C}$.

3. Пусть дискрет некоторого ф.т. T совпадает с классом $\mathcal{C}$, по необходимости удовлетворяющим **(C$_1$)** и **(C$_3$)**. По определению ф.т. обеспечивает непрерывность всех гомоморфизмов, в том числе эпиморфизмов $\varphi: G \to Y$ на группы $Y \in \mathcal{D}(T)$. Поэтому для любой группы G топология τ_G мажорирует инициальную топологию $\tau_G^{\mathcal{C}}$.

4. Докажем, что если $\mathcal{C}$ удовлетворяет не только **(C$_1$)** и **(C$_3$)**, но и **(C$_2$)**, то ф.т. $T^{\mathcal{C}}$ идеален, т. е. обеспечивает открытость всех гомоморфизмов проектирования $\pi: G \to G^{\wedge}$ ($H \trianglelefteq G$, $G^{\wedge} = G/H$). Последний факт достаточно проверять на базисных окрестностях единицы, которыми в данной ситуации служат ко-$\mathcal{C}$-подгруппы. Но если $N \in \mathcal{C}^*(G)$, то $\pi(N) \in \mathcal{C}^*(G^{\wedge})$ (в самом деле, $G^{\wedge}/\pi(N) = (G/H)/(NH/H) \cong G/NH \cong (G/N)/(NH/N) \in \mathcal{C}$, где условие **(C$_2$)** использовано на последнем шаге). Обратно, пусть $T^{\mathcal{C}}$ является ф.и.т. и, следовательно, наводит во всякой фактор-группе фактор-топологию. Фактор-топология для дискретной топологии снова является дискретной. Значит, дискрет $\mathcal{D}(T^{\mathcal{C}})$ удовлетворяет **(C$_2$)**.

5. Рассмотрим произвольный ф.и.т. T, имеющий дискретом псевдомногообразие $\mathcal{C}$. Мы уже знаем, что $T^{\mathcal{C}} \leq T$; докажем противоположное мажорирование. На уровне фильтровых базисов (составленных из нормальных подгрупп) достаточно доказать включение $\mathcal{B}_G \subseteq \mathcal{B}_G^{\mathcal{C}}$ (G — произвольная группа). Любая окрестность $U \in \mathcal{B}_G$ является открытой в τ_G; следовательно, фактор-группа $G^{\wedge} = G/U$ дискретна в смысле фактор-топологии $(\tau_G)^{\wedge}$; следовательно, $G/U \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{C}$, т. е. $U \in \mathcal{B}_G^{\mathcal{C}}$.

Замечание 6. Вместе с отображением $\mathcal{D}$, сопоставляющим ф.т. T его дискрет, рассмотрим отображение θ, сопоставляющее классу групп $\mathcal{C}$ соответствующий функтор ко-$\mathcal{C}$-топологизации: $\theta(\mathcal{C}) = T^{\mathcal{C}}$. В этих обозначениях второе и третье утверждения теоремы 2 принимают следующий вид: $\mathcal{D}(\theta(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$; $\theta(\mathcal{D}(T)) \leq T$; в случае идеальности T минорирование становится равенством.

Замечание 7. Замыканием единичной подгруппы в ко-$\mathcal{C}$-топологии является корадикал $\mathbf{corad}_{\mathcal{C}}(G)$; хаусдорфовость группы $(G, \tau_G^{\mathcal{C}})$ равносильна тривиальности этого корадикала, т. е. $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы G, в связи с чем корадикал называется также $\mathcal{C}$-*аппроксимантом* ($\mathcal{C}$-residual). В частности, псевдомногообразию $\varPhi$ всех конечных групп отвечает функтор коконечной топологизации $T^{\varPhi} = \varGamma$, являющийся, как уже отмечалось, ф.и.т. Тривиальность $\mathcal{C}$-аппроксиманта $A(G, \tau_G^{\varPhi}) = \mathbf{corad}_{\varPhi}(G)$ равносильна *финитной аппроксимируемости* группы G.

6.2. $\mathcal{C}$**-топология** ${}^{\mathcal{C}}\tau_G$ всегда является *цокольной* и, конкретно, порождается одноэлементным базисом ${}^{\mathcal{C}}\mathcal{B}_G = \{{}^{\mathcal{C}}R_G\}$, с цоколем, являющимся *широким* $\mathcal{C}$*-радикалом*: ${}^{\mathcal{C}}R_G = \mathbf{Rad}_{\mathcal{C}}(G)$ (см. определение 5). Это следует из описания (см. п. 2) финальной топологии на G, порожденной всевозможными мономорфизмами $\varphi: X \to G$ всевозможных групп $X \in \mathcal{C}$, наделенных индискретными топологиями, в группу G: образ топологии $\varphi(\iota_X)$ является цокольной топологией на G, с цоколем H^G, где $H = \varphi(X) \cong X$ является $\mathcal{C}$-подгруппой в G; инфимум всех таких топологий также является цокольной топологией, с цоколем — нормальной оболочкой всех $\mathcal{C}$-подгрупп. При дополнительном условии **($\mathbf{R_1}$)** широкий радикал совпадает с обычным и описание цоколя приобретает вид ${}^{\mathcal{C}}R_G = \mathbf{rad}_{\mathcal{C}}(G)$.

Теорема 3. 1. *Если класс* $\mathcal{C}$ *удовлетворяет* **($\mathbf{C_2}$)**, *то функтор* ${}^{\mathcal{C}}T(G) = (G, {}^{\mathcal{C}}\tau_G)$ является ф.т.

2. *Если* $\mathcal{C}$ *строго радикален, то* (2.1) *индискрет* $\mathcal{I}({}^{\mathcal{C}}T) = \mathcal{C}$; (2.2) *функтор* ${}^{\mathcal{C}}T$ *мажорирует любой ф.т., имеющий тот же индискрет*: $[\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}] \Rightarrow [{}^{\mathcal{C}}T \geq T]$; (2.3) *функтор* ${}^{\mathcal{C}}T$ *является ф.и.т.*

3. *Для строго радикального класса групп* $\mathcal{C}$ *функтор* ${}^{\mathcal{C}}T$ *является ф.и.н.т. тогда и только тогда, когда* (3.1) *либо* $\mathcal{C} = \mathcal{G}$ *(и тогда* ${}^{\mathcal{C}}T = I$ *),* (3.2) *либо* $\mathcal{C} = \mathcal{E}$ *(и тогда* ${}^{\mathcal{C}}T = \Delta$ *).*

Доказательство. 1. В силу **($\mathbf{C_1}$)** всякий гомоморфизм $\varphi: G \to G'$ переводит $\mathcal{C}$-подгруппы в $\mathcal{C}$-подгруппы и, следовательно, цоколь ${}^{\mathcal{C}}R_G$ в цоколь ${}^{\mathcal{C}}R_{G'}$; поэтому все гомоморфизмы непрерывны в смысле $\mathcal{C}$-топологий.

2. Пусть теперь класс $\mathcal{C}$ является *строго радикальным*. 2.1. Докажем, что $\mathcal{I}({}^{\mathcal{C}}T) = \mathcal{C}$. Индискретность топологии ${}^{\mathcal{C}}\tau_G$ равносильна тому, что цоколь ${}^{\mathcal{C}}R_G = \mathbf{rad}_{\mathcal{C}}(G) = G$, и, следовательно, $G \in \mathcal{C}$. 2.2. Пусть индискрет некоторого ф.т. T совпадает с классом $\mathcal{C}$, по необходимости удовлетворяющим **($\mathbf{C_1}$)**, **(R)** и **($\mathbf{R_1}$)**. По определению ф.т. все гомоморфизмы $\varphi: X \to G$ должны быть непрерывными (в смысле топологий τ_X и τ_G); в частности, непрерывны все мономорфизмы $\mathcal{C}$-групп (наделенных индискретной топологией) в группу G. Поэтому топология τ_G обязана минорировать финальную топологию ${}^{\mathcal{C}}\tau_G$. 2.3. Для доказательства идеальности функтора ${}^{\mathcal{C}}T$ требуется проверить открытость произвольного эпиморфизма проектирования $\pi: G \to G^{\wedge}$ ($G^{\wedge} = G/H$) в смысле цокольных топологий, что (см. п. 2) равносильно равенству $\pi({}^{\mathcal{C}}R_G) = {}^{\mathcal{C}}R_{G^{\wedge}}$. Обозначим через L правую часть этого равенства. Группа L является наименьшей из таких нормальных в $G^{\wedge}$ подгрупп, фактор-группы по которым принадлежат полупростому классу групп, парному с радикальным классом $\mathcal{C}$. Докажем, что $K = \varphi^{-1}(L)$ совпадает с $\mathbf{rad}_{\mathcal{C}}(G)$. Во-первых, имеем изоморфизм $G/K \cong (G/H)/(K/H) = G^{\wedge}/L$, обеспечи-

вающий полупростоту фактор-группы G/K, а во-вторых, нетрудно понять, что K является наименьшей из нормальных в G подгрупп, факторы по которым полупросты.

3. Последний результат вытекает из третьего утверждения предложения 4. В отличие от случая общего ф.т. T, когда тривиальность индискрета $\mathcal{I}(T)$ не влечет равенство $T = \Delta$, для $T = {}^{\mathcal{C}}T$ в данном случае мы имеем $\mathcal{E} = \mathcal{I}({}^{\mathcal{C}}T) = \mathcal{C}$, откуда сразу получается ${}^{\mathcal{C}}T = {}^{\mathcal{E}}T = \Delta$.

Замечание 8. По аналогии с замечанием 6, наряду с отображением $\mathcal{I}$, сопоставляющим ф.т. T его индискрет, рассмотрим отображение χ, сопоставляющее классу $\mathcal{C}$ функтор ${}^{\mathcal{C}}T$. Утверждения (2.1) и (2.2) теоремы 3 приобретают следующий вид: $\mathcal{I}(\chi(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$; $\chi(\mathcal{I}(T)) \geq T$, причем последнее мажорирование лишь в крайних (тривиальных) случаях обращается в равенство.

7. Продолжение функторов топологизации. Функторы топологизации можно задавать не только на всей категории **Gr**, но и на произвольной полной подкатегории **H** в ней (с классом элементов $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$). В некоторых случаях такие функторы допускают «разумные» *продолжения* на категорию **Gr**.

Предложение 4. *Пусть* **H** *— полная подкатегория в* **Gr**, *класс объектов которой* $\mathcal{H}$ *является псевдомногообразием. Пусть* $T(G) = (G, \tau_G)$ *— ф.т., заданный на* **H**. *Существует заданный на* **Gr** *ф.т.* $\tilde{T}(G) = (G, \tilde{\tau}_G)$, *продолжающий* T ($\tilde{\tau}_G = \tau_G$ *для любой группы* $G \in \mathcal{H}$) *и имеющий тот же дискрет:* $\mathcal{D}(\tilde{T}) = \mathcal{D}(T)$.

Доказательство. Построение функтора $\tilde{T}$ осуществляется с помощью наведения в произвольной группе инициальной топологии, порожденной всевозможными эпиморфизмами этой группы на группы из класса $\mathcal{H}$, снабженные топологиями по функтору T (подробности опускаем, укажем только на необходимость использования некоторых общих свойств инициальных топологий — см. [1, с. 35]).

Замечание 9. В качестве **H** может быть выбрана категория **AbGr**. В частности, в [15] специфическими средствами теории абелевых групп построен пример двух различных ф.т., имеющих одинаковые дискреты. Эти функторы могут быть продолжены на категорию **Gr**, и мы получим следующее уточнение к третьему и пятому утверждениям теоремы 2: в неидеальном случае могут существовать различные ф.т. с одинаковыми дискретами.

Предложение 5. *Пусть* **H** *— полная подкатегория в* **Gr**, *класс объектов которой* $\mathcal{H}$ *является строго радикальным. Пусть* $T(G) = (G, \tau_G)$ *— ф.т., заданный на* **H**. *Существует заданный на* **Gr** *ф.т.* $\breve{T}(G) = (G, \breve{\tau}_G)$, *продолжающий* T ($\breve{\tau}_G = \tau_G$ *для любой группы* $G \in \mathcal{H}$) *и имеющий тот же дискрет:* $\mathcal{I}(\breve{T}) = \mathcal{I}(T)$.

Доказательство. Функтор $\breve{T}$ строится с помощью наведения финальных топологий, порожденных мономорфизмами в данную группу из групп класса $\mathcal{H}$, снабженных топологиями по функтору T; необходимые свойства финальных топологий см. в [1, с. 38].

Библиографический список

1. *Бурбаки Н.* Общая топология : основные структуры. М. : Наука, 1968. 272 с.
2. *Гольцов Д. В., Яцкин Н. И.* Классы групп и подгрупповые топологии // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2011. Вып. 2. С. 115—128.
3. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М. : Наука, 1996. 288 с.
4. *Курош А. Г.* Радикалы в теории групп // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 6. С. 912—931.
5. *Курош А. Г.* Теория групп. М. : Наука, 1967. 648 с.
6. *Нейман Х.* Многообразия групп. М. : Мир, 1969. 264 с.
7. Общая алгебра. М. : Наука, 1990. Т. 1 / под ред. Л. А. Скорнякова. 892 с. (Справ. мат. б-ка).
8. *Плоткин Б. И.* О функториалах, радикалах и корадикалах в группах // Мат. записки Урал. гос. ун-та. 1970. Т. 7, вып. 3. С. 150—182.
9. *Плоткин Б. И.* Общая теория групп // Итоги науки. Сер.: Математика : алгебра, топология, геометрия. М. : ВИНИТИ, 1970. Т. 9. С. 5—74.
10. *Чан Ван Хао*. О полупростых классах групп // Сиб. мат. журн. Т. 3. 1962. № 6. С. 943—949.
11. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М. : Наука, 1989. 384 с.
12. *Щукин К. К.* К теории радикалов в группах // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 6. С. 932—942.
13. *Яцкин Н. И.* К топологической трактовке аппроксимационных свойств групп, связанных с вербальными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2010. Вып. 2. С. 118—127.
14. *Arnautov V. I., Filippov K. M.* Lattices of topologies of algebraic systems // Algebra and Discrete Math. 2006. № 2. P. 1—16.
15. *Boyer D., Mader A.* Functorial topologies on Abelian groups // Rocky Mountain J. of Math. 1980. Vol. 10, № 4. P. 695—708.
16. *Charles B.* Méthodes topologiques en théorie des groupes abéliens // Proc. Colloq. Abelian Groups. Budapest, 1964. P. 29—42.
17. *Dikranjan D., Giordano Bruno A.* Functorial topologies and finite-index subgroups of Abelian groups // Topology and Its Applications. 2011. Vol. 158. P. 2391—2407.
18. *Fay T. H., Walls G. L.* Maximal functorial topologies on Abelian groups // Arch. Math. 1982. Vol. 38. P. 167—174.
19. *Fuchs L.* Infinite Abelian Groups. New York : Acad. Press, 1970. Vol. 1. 290 p. (русское издание: *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1. 336 с.).
20. *Gardner B. J.* A remark on strict radical classes of groups // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1981. Vol. 38, № 1/4. P. 61.
21. *Gardner B. J.* Kurosh — Amitsur radical theory for groups // An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa. 2010. Vol. 18 (2). P. 73—90.
22. *Hewitt E., Ross K. A.* Abstract Harmonic Analysis. Berlin, etc. : Springer-Verlag, 1963. Vol. 1. 525 p. (русское издание: *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. М. : Наука, 1975. Т. 1. 656 с.).
23. *Mader A.* Basic concepts on functorial topologies : (Abelian group theory : proc. of the Oberwolfach conf., 1981) // Lecture Notes in Math. Berlin, etc. : Springer-Verlag, 1981. Vol. 874. P. 251—271.
24. *Pombo D. P. (Jr.)* On a class of topological groups // Bol. Soc. Paran. Mat. 2000. Vol. 24, № 1/2. P. 25—34.
25. *Ribes L., Zalesskii P.* Profinite Groups. Berlin, etc. : Springer-Verlag, 2010. 464 p.

Сведения об авторах

АЗАРОВ
Дмитрий Николаевич
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник кафедры алгебры
и математической логики,
Ивановский государственный университет.
azarov@ivanovo.ac.ru

БАРИНОВА
Марина Олеговна
кандидат биологических наук,
доцент кафедры общей биологии и физиологии,
Ивановский государственный университет.
nayka@list.ru

БОРИСОВА
Елена Анатольевна
доктор биологических наук, зав. кафедрой
общей биологии и физиологии,
Ивановский государственный университет.
floraea@mail.ru

БУСЛАЕВ
Сергей Викторович
Ивановское областное общество охотников
и рыболовов.
ivanovobirds@mail.ru

ГОЛЬЦОВ
Дмитрий Владимирович
аспирант кафедры алгебры
и математической логики,
Ивановский государственный университет.
goltsov_89@mail.ru

ГРИДНЕВА
Вера Валерьевна
аспирантка кафедры ботаники и зоологии,
Ивановский государственный университет.
ivanovobirds@mail.ru

ДАВИДЗОН
Михаил Иосифович
кандидат технических наук, профессор
кафедры общей и теоретической физики,
Ивановский государственный университет.
davese@mail.ru

ЗАРИПОВ
Владимир Николаевич
кандидат биологических наук,
доцент кафедры общей биологии и физиологии,
Ивановский государственный университет.
zaripow@mail.ru

ИСАЕВ
Владимир Анатольевич
доктор биологических наук, профессор
кафедры общей биологии и физиологии,
Ивановский государственный университет.
viam_e@mail.ru

КАЛИНИН
Андрей Александрович
аспирант кафедры экологии и географии,
Шуйский филиал
Ивановского государственного университета.
ivanovobirds@mail.ru

КЛЮЕВ
Михаил Васильевич
доктор химических наук, профессор, заведующий
кафедрой органической и физической химии,
декан биолого-химического факультета,
Ивановский государственный университет.
klyuev@inbox.ru

КРЫЛОВ
Евгений Николаевич
доктор химических наук, профессор
кафедры органической и физической химии,
Ивановский государственный университет.
enk2000S@yandex.ru

КУРИЦЫН Лев Викторович — доктор химических наук, профессор кафедры неорганической и аналитической химии, Ивановский государственный университет.
kalinina_nv52@ mail.ru

КУСКОВСКИЙ Леонид Наумович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экономического анализа и бухгалтерского учета, Ивановский государственный университет.
ya.kyln@yandex.ru

МЕЛЬНИКОВ Владимир Николаевич — кандидат биологических наук, доцент кафедры ботаники и зоологии, Ивановский государственный университет.
ivanovobirds@mail.ru

МИНЕЕВА Лариса Юрьевна — кандидат педагогических наук, доцент, заведующая кафедрой ботаники и зоологии, Ивановский государственный университет.
lmin1@mail.ru

МОЛДАВАНСКИЙ Давид Ионович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и математической логики, Ивановский государственный университет.
moldav@mail.ru

САВЕЛЬИЧЕВА Наталья Сергеевна — студентка 4 курса бакалавриата, Ивановский государственный университет.
natalya.gonina2010@yandex.ru

СКВОРЦОВА Ольга Евгеньевна — ведущий инженер ботанического сада, Ивановский государственный университет.
skvortsova.2010@mail.ru

СОКОЛОВ Евгений Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой вычислительной и прикладной математики, Ивановский государственный университет.
ev-sokolov@yandex.ru

ХАШИН Сергей Иванович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной и прикладной математики, Ивановский государственный университет.
khash2@mail.ru

ХАШИНА Юлия Анатольевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и геометрии, Ивановский государственный университет.
khashina_julia@mail.ru

ЧУДНЕНКО Дмитрий Евгеньевич — кандидат биологических наук, доцент кафедры ботаники и зоологии, Ивановский государственный университет.
ivanovobirds@mail.ru

ЯЦКИН Николай Иванович — кандидат физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и математической логики, Ивановский государственный университет.
niiya@mail.ru

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ «ВЕСТНИКА ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА»

1. В журнал принимаются материалы в электронном виде на стандартно отформатированном CD или по электронной почте с приложением одного экземпляра распечатки на белой бумаге.

Максимальный размер статьи — 1,0 авт. л. (20 страниц текста через 1,5 интервала, 30 строк на странице формата А4, не более 65 знаков в строке, выполненного в редакторе Microsoft Word 2003 шрифтом Times New Roman или Times New Roman Cyr, кегль 14), сообщения — 0,5 авт. л. (10 страниц).

2. Материал для журнала должен быть оформлен в следующей последовательности: **УДК** (для естественных и технических специальностей), **ББК** (в библиографическом отделе библиотеки ИвГУ); на русском и английском языках: **инициалы и фамилия автора, название материала**, для научных статей — **аннотация** (объемом 10—15 строк), **ключевые слова; текст статьи** (сообщения).

3. Библиографические источники должны быть пронумерованы в алфавитном порядке, ссылки даются в тексте статьи в скобках в строгом соответствии с пристатейным списком литературы. Библиографическое описание литературных источников к статье оформляется в соответствии с ГОСТами 7.1—2003, 7.0.5—2008. В каждом пункте библиографического списка, составленного в алфавитном порядке (сначала произведения на русском языке, затем на иностранном), приводится одна работа. В выходных сведениях обязательно указание издательства и количества страниц, в ссылке на электронный ресурс — даты обращения.

4. Фотографии, прилагаемые к статье, должны быть черно-белыми, контрастными, рисунки — четкими.

5. В конце представленных материалов следует указать полный почтовый адрес автора, его телефон, фамилию, имя, отчество, ученую степень, звание, должность. Материал должен быть подписан всеми авторами.

6. Направление в редакцию ранее опубликованных и принятых к печати в других изданиях работ не допускается.

7. Редакция оставляет за собой право осуществлять литературную правку, корректирование и сокращение текстов статей.

8. Рукописи аспирантов публикуются бесплатно.

ПРАВИЛА РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ СТАТЕЙ

1. Статьи авторов, являющихся преподавателями, сотрудниками или обучающимися ИвГУ, принимаются редакционной коллегией соответствующей серии (выпуска) на основании письменного решения (рекомендации) кафедры или научного подразделения ИвГУ и рецензии доктора наук, не являющегося научным руководителем (консультантом), руководителем или сотрудником кафедры или подразделения, где работает автор.

2. Статьи авторов, не работающих и не обучающихся в ИвГУ, принимаются редакционной коллегией соответствующей серии (выпуска) на основании рекомендации их вуза или научного учреждения и рецензии доктора наук, работающего в ИвГУ.

3. Поступившие статьи проходят далее рецензирование одного из членов редколлегии соответствующей серии (выпуска), являющегося специалистом в данной области.

4. Статья принимается к публикации при наличии двух положительных рецензий и положительного решения редколлегии серии (выпуска). Порядок и очередность публикации статьи определяются в зависимости от объема публикуемых материалов и тематики выпуска.

5. В случае отклонения статьи автору направляется аргументированный отказ в письменной (электронной) форме. Авторы имеют право на доработку статьи или ее замену другим материалом.