МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный университет»

УТВЕРЖДЕНО

Проректор по научной работе и международным отношениям профессор Сырбу С. А.

____

«24» февраля 2016 г.

ПРОГРАММА

вступительного экзамена по специальной дисциплине для направления подготовки высшего образования — подготовка кадров высшей квалификации по программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре

01.06.01 – Математика и механика

Иваново — 2016

Программа составлена в соответствии с требованиями федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования по программам подготовки кадров высшей квалификации

1. Введение

Данная программа предназначена для сдачи вступительного экзамена по направлению подготовки 01.06.01 — Математика и механика. Она состоит из перечисления тем и их содержания, списка вопросов, источников и литературы для сдачи вступительного экзамена в аспирантуру.

2. Процедура экзамена

Экзамен проводится в устной форме.

Продолжительность подготовки ответа – 45 мин.

С абитуриентом проводится устная беседа по материалам билета, включающего два вопроса из программы.

Результаты проведения вступительного экзамена для каждого поступающего оформляются персональным протоколом, в котором фиксируются основные и дополнительные вопросы, а также указываются результаты экзамена в форме оценок по пятибалльной шкале.

После утверждения протокола проведения вступительного экзамена и его окончательных результатов данный документ хранится в личном деле поступающего.

Решение экзаменационной комиссии размещается на официальном сайте и на информационном стенде приемной комиссии не позднее трех дней с момента проведения вступительного экзамена.

ПРОФИЛЬ – МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

<u>Введение в теорию групп</u>

Группы и подгруппы. Полугруппы. Моноиды. Обратимые элементы моноида. Равносильные определения группы. Примеры групп. Абелевы группы. Порядок конечной группы. Группа вычетов. Подгруппы. Описание подгрупп группы Z.

Группы преобразований. Отображения множеств. Группа биективных преобразований множества и группа подстановок. Группы биективных преобразований в геометрии. Группы симметрий правильных многоугольников и многогранников.

Гомоморфизмы групп. Гомоморфизмы групп, их свойства. Ядро и образ гомоморфизма. Первая теорема о гомоморфизмах групп. Изоморфные группы. Абстрактные свойства групп. Теорема Кэли о вложении произвольной группы в группу преобразований. Линейные группы. Вложение произвольной конечной группы в общую линейную группу.

Циклические группы, порядок элемента группы. Порядок элемента группы, его свойства. Выражение порядка степени элемента через порядок этого элемента. Циклическая подгруппа и совпадение её порядка с порядком порождающего элемента. Циклические группы и их описание с точностью до изоморфизма. Теорема о подгруппах циклической группы. Квазициклическая группа и описание её подгрупп.

Системы порождающих в группах, группы конечного ранга. Подгруппы, порождённые множеством элементов – равносильные определения. Системы образующих в группах. Примеры порождающих множеств в группе подстановок и в группе чётных подстановок. Конечно порождённые группы. Локальная цикличность группы Q. Группы конечного общего ранга. Группы конечного специального ранга. Ранг абелевой группы. Описание абелевых групп без кручения ранга 1.

Конечные группы и теоремы Силова, простые конечные группы и теорема Галуа о простоте знакопеременных групп.

Свободные абелевы группы. Свободные абелевы группы конечного и бесконечного ранга. Линейно независимые системы элементов и базы. Абелевы группы как фактор-группы свободных абелевых групп. Теорема о подгруппах свободной абелевой группы.

<u>Введение в теорию колец</u>

Первоначальные сведения о кольцах. Понятия кольца, тела, поля. Кольцо многочленов, кольцо формальных степенных рядов, матричные кольца, прямые суммы колец, внешнее присоединение единицы и другие способы построения колец. Левые, правые и двусторонние идеалы, фактор-кольца, гомоморфизмы колец, теоремы о гомоморфизмах и изоморфизмах. Максимальные и минимальные идеалы. Существование максимальных идеалов в кольце с единицей.

Линейные алгебры над полем. Определение и примеры линейных алгебр над полем. Групповая алгебра. Алгебра кватернионов. Алгебры с делением. Теорема Фробениуса. Вложение конечно-мерной алгебры в матричную алгебру.

Первоначальные сведения о модулях над кольцами. Определение и примеры модуля над кольцом. Кольцо как модуль над самим собой. Подмодули, системы порождающих для модуля, конечно порожденные и циклические модули. Модульные гомоморфизмы, фактор-модули и теоремы о модульных гомоморфизмах. Описание с точностью до изоморфизма всех неприводимых правых модулей над кольцом как фактор-модулей этого кольца по его максимальным правым идеалам.

Аннуляторы модулей. Связь между модулями над кольцом и представлениями этого кольца. Аннулятор модуля и его совпадение с ядром соответствующего представления. Теорема о совпадении пересечения всех максимальных правых идеалов кольца с единицей и пересечения аннуляторов всех неприводимых правых модулей над этим кольцом; замечание о том, что указанное пересечение является двусторонним идеалом данного кольца.

Радикалы колец. Равносильные определения радикального свойства колец. Примеры радикальных свойств: квазирегулярность и свойство НИЛЬ. Радикалы, соответствующие двум указанным свойствам: радикал Джекобсона и нильрадикал (верхний нильрадикал Кётэ). Включение нильрадикала кольца в радикал Джекобсона этого кольца, совпадение этих радикалов в артиновом кольце, пример кольца, в котором указанное включение является строгим. Характеризация радикала Джекобсона кольца с единицей как пересечения всех максимальных правых (левых) идеалов этого кольца и как пересечения аннуляторов всех неприводимых правых (левых) модулей над этим кольцом.

Прямые суммы модулей. Свободные модули. Внешние и внутренние прямые суммы. Теорема Ремака. Различные определения свободного модуля. Базы. Теорема о свободе подмодулей свободного модуля над кольцом главных идеалов. Теорема об инвариантном базовом числе для свободного модуля над коммутативным кольцом.

Нётеровы и артиновы модули и кольца. Различные определения нётеровых и артиновых модулей. Замкнутость класса всех нётеровых (артиновых) модулей, относительно подмодулей, фактор-модулей, расширений и конечных прямых сумм. Характеризация нётеровых и одновременно артиновых модулей, как модулей конечной длины (т.е. модулей, обладающих композиционным рядом). Теорема Жордана – Гёльдера. Нётеровы и артиновы кольца (слева и справа). Пример кольца нётерова и артинова слева, которое не нётерово и не артиново справа. Нётеровость (артиновость) конечно порожденного правого модуля над кольцом нётеровым (артиновым) справа. Теорема

Гильберта о базисе.

Вполне приводимые модули и кольца. Равносильные определения вполне приводимого модуля. Замкнутость класса всех вполне приводимых модулей относительно подмодулей и фактор-модулей. Равносильность артиновости и нётеровости для вполне приводимого модуля. Характеризация вполне приводимых модулей конечной длины как артиновых модулей с нулевым радикалом. Вполне приводимые кольца. Характеризация вполне приводимых колец как артиновых справа колец с нулевым радикалом Джекобсона. Вполне приводимость модуля над вполне приводимым кольцом. Структурная теорема Веддербарна – Артина для вполне приводимых колец (доказательство в разделе 3.10) и её следствия. Теорема Машке о групповой алгебре конечной группы.

Расширения полей. Конечные и алгебраические расширения полей. Теорема о строении простого алгебраического расширения. Конечность (алгебраичность) башни расширений с конечными (алгебраическими) этажами. Поле алгебраических чисел. Поле разложения. Конечные поля. Алгебраическое замыкание поля. Теорема о примитивном элементе.

ВОПРОСЫ К ВСТУПИТЕЛЬНОМУ ЭКЗАМЕНУ В АСПИРАНТУРУ

СОВРЕМЕННАЯ АЛГЕБРА

1. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп. Теорема Кэли о вложениях групп. Описание циклических групп с точностью до изоморфизма.
2. Смежные классы группы по подгруппе. Нормальные подгруппы, фактор-группы и естественный гомоморфизм. Теорема о гомоморфизмах групп. Теорема о соответствии подгрупп при гомоморфизме.
3. Теорема Лагранжа и её следствия. Необратимость теоремы Лагранжа. Теорема Силова о существовании в конечной группе подгрупп примарных порядков.
4. Действие группы на множестве. Теоремы Силова о конечных группах.
5. Прямые произведения групп. Строение конечной абелевой группы. Строение конечно порождённой абелевой группы.
6. Нормальные и субнормальные ряды в группах. Разрешимые, полициклические и нильпотентные группы (определения, примеры и простые свойства).
7. Задание группы порождающими символами и определяющими соотношениями. Свободные группы, свободные произведения групп и свободные произведения групп с объединёнными подгруппами (определения, примеры и простые свойства).
8. Идеалы колец. Гомоморфизмы колец и фактор-кольца. Теоремы о гомоморфизмах колец и о соответствии подколец при естественном гомоморфизме. Максимальные и минимальные идеалы колец.
9. Модули над кольцами. Фактор-модули и модульные гомоморфизмы. Неприводимые и циклические модули, их описание с точностью до изоморфизма.
10. Модульные аннуляторы. Совпадение пересечения всех максимальных правых идеалов кольца с единицей с пересечением аннуляторов всех неприводимых правых модулей над этим кольцом.
11. Квазирегулярные элементы кольца. Общее понятие радикала кольца. Радикал Джекобсона.
12. Нильрадикал кольца и его включение в радикал Джекобсона. Совпадение этих радикалов в артиновом кольце с единицей.

13. Совпадение радикала Джекобсона кольца с единицей и пересечения всех максимальных правых идеалов этого кольца. Другие характеризации радикала Джекобсона.

14. Кольцо модульных эндоморфизмов. Лемма Шура. Представление кольца с единицей модульными эндоморфизмами.

15. Кольцо эндоморфизмов вполне приводимого модуля как прямая сумма матричных колец над телами. Структурная теорема Веддербарна – Артина о вполне приводимых кольцах.

Основная литература:

1. Архангельский А. В. Канторовская теория множеств. М.: МГУ. 1988.
2. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс. 2001.
3. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука. 1979.
4. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука. 1972.
5. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Т. 3. М.: Физ-мат. литература. 2001.
6. Кострикин А. И. Сборник задач по алгебре. М.: Факториал. 1995
7. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. М.: Высшая школа. 1979.
8. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М.: Физ-мат литература. 1962.
9. Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука. 1967.
10. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука. 1970.
11. Молдаванский Д. И. Введение в теорию полей. Иваново. 1994.
12. Скорняков Л.А. Элементы алгебры. М.: Наука. 1980.
13. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М.: Наука. 2003.
14. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. М.: Наука. 1984.
15. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир. 1972.

Дополнительная литература

1. Винберг Э. Б. Алгебра многочленов. М.: Просвещение. 1980.
2. Коэн П. Теория множеств и континуум-гипотеза. М.: Мир. 1969.
3. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир. 1970.
4. Ленг С. Алгебра. М.: Мир. 1969.
5. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. М.: Мир. 1988.
6. Холл М. Теория групп. М.: ИЛ. 1962.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1. http://window.edu.ru/window/ (единое окно доступа к образовательным ресурсам)
2. http://10.1.1.39/ (доступ из локальной сети университета к электронной библиотеке математического факультета)
3. http://www.mathnet.ru/ (Общероссийский математический портал)
4. http://eqworld.ipmnet.ru/ (Мир математических уравнений)