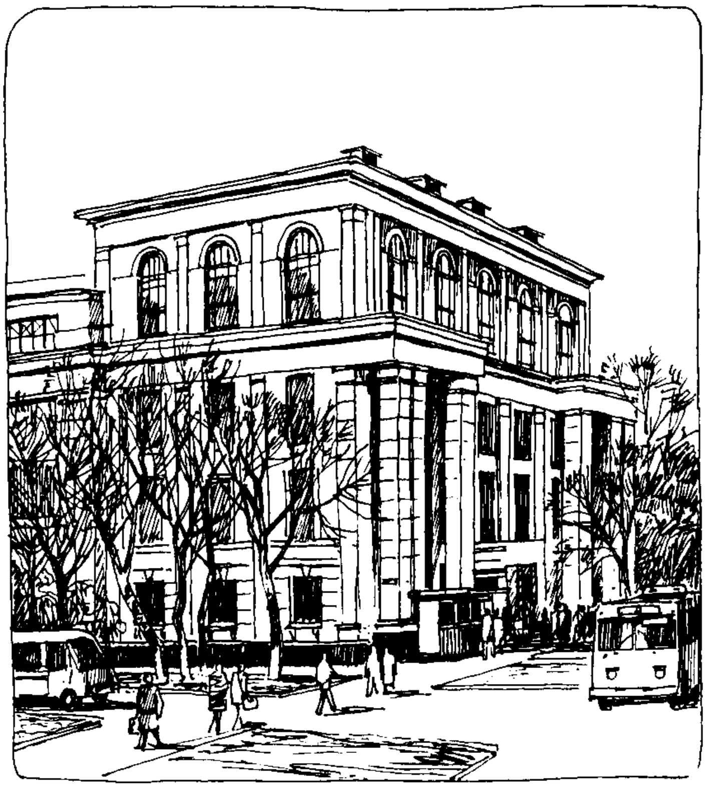
ISSN 2500-2783 (online)

ВЕСТНИК ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия «Естественные, общественные науки»



2021

Выпуск 2

ISSN 2500-2783 (online)

ВЕСТНИК ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия «Естественные, общественные науки»

2021. Вып. 2

Научный журнал **Издается с 2000 года**

Журнал зарегистрирован в Национальном агентстве ISSN Российской Федерации 27.05.2016 г. как электронное сетевое издание

Учредитель ФГБОУ ВО «Ивановский государственный университет»

Адрес редакции (издательства):

153025 Иваново, ул. Ермака, 39, к. 462
тел./факс: (4932) 93-43-41
e-mail: publisher@ivanovo.ac.ru

Электронная копия журнала размещена на сайтах www.elibrary.ru, www.ivanovo.ac.ru

ISSN 2500-2783 (online)

IVANOVO STATE UNIVERSITY BULLETIN

Series «Natural, Social Sciences»

2021. Issue 2

Scientific journal **Issued since 2000**

The journal is registered at the National ISSN Agency of the Russian Federation on 27.05.2016 as an electronic online publication

Founded by Ivanovo State University

Address of the editorial office:

153025, Ivanovo, Ermak str., 39, office 462
tel./fax: (4932) 93-43-41
e-mail: publisher@ivanovo.ac.ru

Index of subscription
in the catalogue «Russian Press» 41512

Electronic copy of the journal can be found
on the web-sites www.elibrary.ru,
www. ivanovo.ac.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Биология

Химия

Педагогика

Социология

CONTENTS

Mathematics

Biology

Chemistry

Pedagogics

Sociology

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518

А. С. Белов

ОБ ОЦЕНКЕ ОДНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ КОСИНУС-СУММЫ

Для сумм

$$S_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cos(kx)$$

доказывается оценка

$$S_n(x) > -\ln \sin(x/2),$$

которая справедлива при всех $x \in (0, \pi)$ и целых

$$n \geq \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{2}.$$

Из этой оценки вытекает неравенство Юнга и некоторые другие оценки, которые обобщают неравенство Юнга.

Суммы $S_n(x)$ являются частными суммами косинус-ряда

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(nx),$$

который в интервале $(0, 2\pi)$ сходится к функции $1 - \ln|2\sin(x/2)|$ и является рядом Фурье этой функции. Поэтому доказанная оценка для суммы $S_n(x)$ является естественной.

Ключевые слова: классические тригонометрические суммы, оценки частных сумм тригонометрического ряда.

A. S. Belov

ON THE ESTIMATE THE CLASSICAL COSINE-SUM

For sums

$$S_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cos(kx),$$

the estimate

$$S_n(x) > -\ln \sin(x/2)$$

for $x \in (0, \pi)$ and integer

$$n \geq \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{2}$$

is proved. From this estimate, the classical Young's inequality and some others estimates more general than the Young's inequality follow.

The sums $S_n(x)$ are partial sums of cosine-series

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(nx),$$

that, in the interval $(0, 2\pi)$, converges to the function $1 - \ln|2\sin(x/2)|$ and is the Fourier series of this function. Therefore, the proved estimate for sums $S_n(x)$ is natural.

Key words: the classical trigonometric sums, the estimates of the partial sums of trigonometric series.

1. Введение. Основной результат

Пусть задана последовательность действительных чисел $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. При всех целых неотрицательных n и действительных x через

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) \tag{1.1}$$

обозначим частные суммы косинус-ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Пусть

$$V_n(x) = (2a_0 - a_1) \sin\Big(\frac{x}{2}\Big) + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) \sin\Big(\Big(k + \frac{1}{2}\Big)\, x\Big) - a_{n+1} \tag{1.2}$$

при всех целых $n \geq 0$ и действительных x. Эти полиномы связаны с суммами (1.1) тождеством

$$2 \sin\Big(\frac{x}{2}\Big) S_n(x) = V_n(x) + a_{n+1} \left(1 + \sin\Big(\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\, x\Big)\right), \tag{1.3}$$

справедливым при всех целых $n \geq 0$.

В статьях [1, 2, 3] нами изложены основные идеи нового метода доказательства неотрицательности частных сумм тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами. Далее предполагаем, что последовательность действительных чисел $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$a_n \geq 0 \quad \text{и} \quad a_n \geq a_{n+1} \quad \text{при} \quad n \geq 1, \quad 2a_0 \geq a_1, \quad a_0 > 0. \tag{1.4}$$

При всех $t \in [0, +\infty)$ определим функцию

$$a(t) = \begin{cases} 2a_0 & \text{при} \quad t \in [0,\, 1/2), \\ a_n & \text{при} \quad t \in [n - 1/2,\, n + 1/2), \ n \geq 1. \end{cases} \tag{1.5}$$

В методе и в дальнейшем изложении важную роль играют функции

$$M(x) = M(a; x) = \int_0^{3\pi/(2x)} a(t) \cos(tx)\, dt, \qquad x > 0, \tag{1.6}$$

и

$$M_4(x) = M_4(a; x) = \int_0^{7\pi/(2x)} a(t) \cos(tx)\, dt, \qquad x > 0. \tag{1.7}$$

Функции (1.6) и полиномы (1.2) тесно связаны между собой, поскольку (см. [1, лемма 2.2])

$$x\, M(x) = V_n(x) \quad \text{при всех} \quad x \in \Big[\frac{3\pi}{2n+3}, \frac{3\pi}{2n+1}\Big] \tag{1.8}$$

для всех целых $n \geq 0$.

Введенные обозначения используются на протяжении всей этой статьи и считаются определенными, как только задана последовательность $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Важность изучения функции (1.6) для исследования на неотрицательность частных сумм (1.1) становится ясной из следующей теоремы (см. [1, теорема 3.1]).

Теорема A. *Пусть последовательность* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (1.4) *и точка* $x \in (0, \pi]$ *произвольна. Тогда, если*

$$M(x) > 0, \tag{1.9}$$

то

$$S_n(x) > 0 \qquad \text{при всех} \qquad n \geq 0 \tag{1.10}$$

и

$$V_n(x) > 0 \qquad \text{при всех} \qquad n \geq \frac{3\pi}{2x} - \frac{3}{2}. \tag{1.11}$$

Более того, теорема останется верной, если одновременно в (1.9), (1.10) *и* (1.11) *знак "$>$" заменить на знак "$\geq$".*

Таким образом, как только доказано (1.9), то мы немедленно можем утверждать (1.10).

Пусть всюду далее квадратные скобки означают целую часть числа, заключенного в них. Суть нового метода доказательства неотрицательности частных сумм (1.1) состоит прежде всего в изучении функции (1.6) в окрестности нуля, т. е. в доказательстве того, что существует точка $x_0 \in (0, \pi]$, для которой $M(x) > 0$ при всех $x \in (0, x_0)$, и в нахождении такой точки x_0.

Далее функция (1.6) изучается на остальной части промежутка $(0, \pi]$ на основе равенств (1.8) и (1.2).

Поскольку (см. [1, лемма 3.1]) $M_4(x) \geq M(x)$ при всех $x > 0$, то там, где условие (1.9) не выполнено, изучается функция (1.7) на неотрицательность.

В силу теоремы A функция $S_{[3\pi/2x]}(x)$ положительна там, где верно условие (1.9). Поэтому изучаем эту функцию на неотрицательность только там, где условие (1.9) не выполнено.

Затем применяем следующие теоремы, которые доказаны в статье [2].

Теорема B. *Пусть выполнены условия* (1.4) *и точка* $x \in (0\,, \pi]$ *произвольна. Тогда, если*

$$M_4(x) > 0 \tag{1.12}$$

и

$$S_{[3\pi/2x]}(x) > 0, \tag{1.13}$$

то справедливо утверждение (1.10)*. При этом теорема останется верной, если одновременно в* (1.12), (1.13) *и* (1.10) *знак "$>$" заменить на знак "$\geq$".*

Следующая теорема является дополнительной к теореме B.

Теорема C. *Пусть выполнены условия* (1.4), *точка* $x \in (0, \pi]$ *произвольна и справедливо условие* (1.12)*. Пусть* $M(x) = 0$*. Тогда*

a) если число $3\pi/2x - 1/2$ *не целое, то верно утверждение* (1.10);

b) если число $N = 3\pi/2x - 1/2$ *целое, то* $S_N(x) = 0$ *и при всех целых* $n \geq 0$, $n \neq N$, *сумма* $S_n(x) > 0$.

Теоремы A, B и C во многих случаях сводят доказательство неотрицательности частных сумм (1.1) к исследованию трех функций (1.6), (1.7) и $S_{[3\pi/2x]}$.

Отметим, что для проверки условий теоремы B иногда удобнее сначала доказать, что справедливо утверждение $M_4(x) - S_{[3\pi/2x]}(x) \geq 0$, и отсюда и из (1.13) уже выводить условие (1.10).

При всех натуральных n будем пользоваться обозначением

$$\nu_n = \sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=m}^{n-1} a_k - \frac{1}{3}\,(6m+1-2n)\,a_m, \qquad \text{где} \qquad m = \Big[\frac{n+1}{3}\Big].$$

Ясно (см. также [2]), что $\nu_1 = a_0/3$ и

$$\nu_{n+1} - \nu_n = \frac{2}{3}\,a_{[(n+1)/3]} - a_n \qquad \text{при всех} \qquad n \geq 1.$$

В [2] получена следующая теорема.

Теорема D. *Пусть последовательность $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (1.4), условиям*

$$a_0 \geq a_1, \qquad 2a_0 + a_1 \geq 4a_2,$$

и условию

$$\nu_n \geq 0 \qquad \textit{при всех} \qquad n \geq 5.$$

Тогда при всех $x \in (0, \pi)$ верны утверждения (1.9), (1.10) и (1.11).

В частности, если невозрастающая последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$a_0 > 0, \qquad 2a_0 + a_1 \geq 4a_2, \qquad a_0 + a_1 \geq a_2 + a_3 + a_4$$

и

$$2a_n \geq 3a_{3n-1} \qquad \textit{при всех} \qquad n \geq 2,$$

то при всех $x \in (0, \pi)$ верны утверждения (1.9), (1.10) и (1.11).

В этой статье мы будем всюду далее рассматривать конкретную последовательность $a_0 = 1$, $a_n = 1/n$ при всех $n \geq 1$. Все введенные выше обозначения далее считаются определенными для этой конкретной последовательности. Тогда

$$2a_n - 3a_{3n-1} = \frac{3n-2}{(3n-1)\,n} > 0$$

при всех $n \geq 1$. Следовательно, условия теоремы D выполнены и, значит, $M(x) > 0$ при всех $x \in (0, \pi)$. Поэтому верно (1.10) при всех $x \in (0, \pi)$, то есть частным случаем теоремы D является результат Юнга [9] (см. также [5, отдел 6, задачи 26, 27, 28]), который обобщался в [6, 7, 8] (см. также цитированную в них литературу).

Таким образом, в этой статье мы применим метод к суммам

$$S_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,\cos(kx), \tag{1.14}$$

которые являются частными суммами косинус-ряда

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\cos(nx). \tag{1.15}$$

В результате будут получены новые оценки, которые показывают эффективность метода.

В этом случае

$$a(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{[t+1/2]} & \text{при} \quad t \geq \dfrac{1}{2}, \\ 2 & \text{при} \quad t \in \Big[0,\ \dfrac{1}{2}\Big). \end{cases}$$

Таким образом,

$$a(t) = \frac{1}{k} \quad \text{при} \quad t \in [k - 1/2,\ k + 1/2)$$

для всех $k \geq 1$. Отсюда и из (1.14) следует (см. [1, формула 2.12])

$$2\,\sin(x/2)\,S_n(x) = x\int_0^{n+1/2} a(t)\,\cos(tx)\,dt \quad \text{при всех} \quad n \geq 0,$$

и для всех $x > 0$ и целых $n \geq 0$ верна оценка

$$2\,\sin(x/2)\,S_n(x) \geq xM(x), \quad \text{если} \quad n + 1/2 \geq \pi/(2x). \tag{1.16}$$

Справедлива также оценка

$$2\,\sin(x/2)\,S_n(x) \geq xM_4(x), \quad \text{если} \quad n + 1/2 \geq 5\pi/(2x).$$

Положим

$$H(x) = \frac{xM(x)}{2\,\sin(x/2)} \quad \text{при} \quad x \in (0,\ 2\pi). \tag{1.17}$$

Основными являются следующие две теоремы.

Теорема 1.1. *Функции* $H(x)$ *и* $H(x) + \ln\sin(x/2)$ *строго убывают и положительны на интервале* $(0,\ \pi)$, *а при* $x = \pi$ *обращаются в нуль. В частности,*

$$H(x) > -\ln\sin(x/2) \quad \textit{при всех} \quad x \in (0,\ \pi). \tag{1.18}$$

Теорема 1.2. *Для любого* $v \in (0, \pi]$ *и для каждого целого*

$$n \geq \frac{\pi}{2v} - \frac{1}{2} \tag{1.19}$$

верны оценки

$$S_n(x) > H(v) \qquad \textit{при всех} \quad x \in (0,\ v), \tag{1.20}$$

$$S_n(x) > -\ln\sin(v/2) \quad \textit{при всех} \quad x \in (0,\ v). \tag{1.21}$$

В частности, справедлива оценка

$$S_n(x) > -\ln\sin(x/2) \quad \textit{при всех} \quad x \in (0,\ \pi) \quad \textit{и} \quad n \geq \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{2}. \tag{1.22}$$

Заметим, что ряд (1.15) является (см. [4, гл. 1, формула 2.8, гл. 7, формула 2.2]) рядом Фурье функции $1 - \ln|2\sin(x/2)|$ и сходится к этой функции равномерно на каждом сегменте, содержащемся в интервале $(0,\ 2\pi)$. Поэтому оценка (1.22) для суммы (1.14) является естественной.

Теорема 1.3. *Для любого натурального числа* m *и для каждого целого*

$$n \geq \frac{m-1}{3} \tag{1.23}$$

верна оценка

$$S_n(x) > S_m\Big(\frac{3\pi}{2m+1}\Big) \quad \textit{при всех} \quad x \in \Big(0,\ \frac{3\pi}{2m+1}\Big). \tag{1.24}$$

В частности, справедлива оценка

$$S_n(x) > \frac{19}{24} \quad \textit{при всех} \quad x \in (0,\, \pi/3) \quad \textit{и} \quad n \geq 1. \tag{1.25}$$

Теоремы 1.1, 1.2, 1.3 и некоторые их следствия будут доказаны в следующем разделе. А в разделе 3 приведены без доказательства некоторые другие теоремы о суммах (1.14), которые также получаются из доказанных теорем с использованием излагаемого нового метода.

Теперь перейдем к доказательствам сформулированных выше результатов.

2. Доказательства теорем 1.1, 1.2, 1.3 и некоторых их следствий

Доказательство теоремы 1.1.

Функции $M(x)$, $H(x)$ и $H(x)+\ln\sin(x/2)$ имеют первые непрерывные производные на интервале $(0,\, 2\pi)$ и при $x = \pi$ обращаются в нуль. Возьмем любое натуральное n и докажем, что первые производные функций $H(x)$ и $H(x) + \ln\sin(x/2)$ строго отрицательны при

$$x \in \Big(\frac{3\pi}{2n+3},\, \frac{3\pi}{2n+1}\Big). \tag{2.1}$$

Действительно, при условии (2.1) из (1.17), (1.3) и (1.8) имеем

$$H(x) = S_n(x) - \frac{1 + \sin\big((n+1/2)\,x\big)}{2\,(n+1)\,\sin(x/2)}. \tag{2.2}$$

Отсюда

$$H'(x) = -\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) - \frac{(n+1/2)\,\cos\big((n+1/2)\,x\big)}{2\,(n+1)\,\sin(x/2)} + \\ + \frac{\cos(x/2)\,\big(1+\sin\big((n+1/2)\,x\big)\big)}{4\,(n+1)\,\sin^2(x/2)}.$$

Используя известную формулу для сопряженного ядра Дирихле (см. [4, гл. 1, п. 1]), получим

$$H'(x) = \frac{\cos\big((n+1/2)\,x\big)}{4\,(n+1)\,\sin(x/2)} - \frac{\cos(x/2)}{2\,\sin(x/2)} + \frac{\cos(x/2)\,\big(1+\sin\big((n+1/2)x\big)\big)}{4\,(n+1)\,\sin^2(x/2)}.$$

Таким образом,

$$H'(x) = \frac{\cos(x/2) + \sin\big((n+1)\,x\big)}{4\,(n+1)\,\sin^2(x/2)} - \frac{\cos(x/2)}{2\,\sin(x/2)}, \tag{2.3}$$

$$\big(H(x) + \ln\sin(x/2)\big)' = \frac{\cos(x/2) + \sin\big((n+1)\,x\big)}{4\,(n+1)\,\sin^2(x/2)}. \tag{2.4}$$

Из условия (2.1) вытекает, что $(2n+1)x < 3\pi$ и $(2n+3)x > 3\pi$, то есть

$$-x < (2n+2)x - 3\pi < x.$$

Поэтому

$$\cos(x/2) + \sin\big((n+1)\,x\big) = \cos(x/2) - \cos\big(|(2n+2)\,x - 3\pi|/2\big) < 0.$$

Следовательно, при

$$x \in \Big[\frac{3\pi}{2n+3}, \frac{3\pi}{2n+1}\Big) \tag{2.5}$$

производная (2.3) функции $H(x)$ строго отрицательна, а при условии (2.1) строго отрицательна и производная (2.4). Поэтому функции $H(x)$ и $H(x)+\ln\sin(x/2)$ строго убывают и положительны на интервале $(0,\,\pi)$. Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2.

Из (1.17) и (1.16) следует, что для всех $x \in (0,\,2\pi)$ и целых $n \geq 0$ верна оценка

$$S_n(x) \geq H(x) \quad \text{при} \quad n + 1/2 \geq \pi/(2x). \tag{2.6}$$

Возьмем любые $v \in (0,\,\pi]$ и целое n, которое удовлетворяет условию (1.19). Тогда при $x \in (0,\,v)$ из (2.6) и теоремы 1.1 имеем

$$S_n(x) \geq H(x) > H(v) \quad \text{при} \quad x \geq \pi/(2n+1).$$

Если $x \in [0,\,\pi/(2n+1)]$, то сумма (1.14) при $n \geq 1$ строго убывает, а при $n = 0$ постоянна. Поэтому

$$S_n(x) \geq H\big(\pi/(2n+1)\big) > H(v) \quad \text{при} \quad x < \pi/(2n+1).$$

Значит,

$$S_n(x) > H(v) \quad \text{при} \quad x \in (0,\,v)$$

и оценка (1.20) доказана. Отсюда и из (1.18) вытекает оценка (1.21), и из (2.6) следует оценка (1.22). Теорема 1.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.3.

Возьмем любое натуральное число m и в теореме 1.2 положим

$$v = \frac{3\pi}{2m+1}.$$

Тогда (1.19) запишется как (1.23). Из (2.2) сразу вытекает, что в этом случае

$$H(v) = S_m\Big(\frac{3\pi}{2m+1}\Big).$$

Поэтому (1.20) запишется как (1.24). При $m = 4$ получим (1.25), поскольку

$$S_4(\pi/3) = \frac{19}{24}.$$

Теорема 1.3 доказана.

Заметим, что теорема 1.3 при $m = 1$, или, что то же самое, теорема 1.2 при $v = \pi$, дает неравенство Юнга.

Как следствия теорем 1.1, 1.2 и 1.3 получаем следующие две теоремы.

Теорема 2.1. *Для любого натурального числа n при всех*

$$x \in \Big(0,\,\frac{3\pi}{13}\Big)$$

верна оценка

$$S_n(x) > S_6\Big(\frac{3\pi}{13}\Big) = 1{,}140496\ldots \tag{2.7}$$

Доказательство. В теореме 1.3 положим $m = 6$. Поскольку

$$S_6(3\pi/3) = 1{,}140496\ldots,$$

то получим (2.7) при $n \geq 2$. При $n = 1$ (2.7) вытекает из того, что

$$S_1(3\pi/3) > S_6(3\pi/3).$$

Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. *Для любого натурального числа n при всех*

$$x \in \left(0,\, \frac{\pi}{4}\right)$$

верна оценка

$$S_n(x) > H\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1{,}063407\ldots \tag{2.8}$$

Доказательство. В теореме 1.2 положим $v = \pi/4$. Тогда из (2.2), где $n = 5$, получим

$$H(\pi/4) = S_5(\pi/4) - \frac{1 + \sin(11\pi/8)}{12\,\sin(\pi/8)} = 1{,}063407\ldots$$

Поэтому при $n \geq 2$ верно (2.8). Поскольку

$$S_1(\pi/4) > H(\pi/4),$$

то получим (2.8) и при $n = 1$. Теорема 2.2 доказана.

Таким образом, при $x \in (0,\, 3\pi/13)$ можно использовать оценку (2.7), а при $x \in [3\pi/13,\, \pi/4)$ лучше использовать оценку (2.8).

3. О некоторых оценках, связанных с суммами (1.14)

В этом разделе приведены без доказательства некоторые другие оценки, связанные с суммами (1.14), которые получаются из доказанных выше теорем с использованием излагаемого метода.

Пусть $z_1 \in (7\pi/10,\, 3\pi/4)$ — единственная точка в этом интервале, в которой $S_4(z_1) = S_2(z_1)$. Тогда

$$z_1 = 2,336478908\ldots = \frac{\pi}{1,3445842\ldots}.$$

Пусть $z_2 \in (3\pi/4,\, 7\pi/8)$ — единственная точка в этом интервале, в которой $S_4(z_2) = S_1(z_2)$. Тогда

$$z_2 = 2,3990386\ldots = \frac{\pi}{1,30952\ldots}.$$

Пусть $v_0 \in (\pi/4,\, 3\pi/10)$ — единственная точка в этом интервале, в которой $S_5(v_0) = S_0(v_0)$. Тогда

$$v_0 = 0,8398964\ldots = \frac{\pi}{3,740452\ldots}.$$

Теорема 3.1. *Для любого $x \in (0, \pi]$ функция*

$$G_1(x) = \min_{n \geq [\pi/2x]} S_n\,(x)$$

равна

$$\begin{array}{lll} S_{[3\pi/2x]}\,(x) & \textit{при} & x \in (0,\, z_1] \cup [z_2,\, \pi], \\ S_{[7\pi/2x]}\,(x) & \textit{при} & x \in [z_1,\, z_2]. \end{array}$$

В частности, на отрезке $[0, \pi]$ *функция* $\min_{n\ge 0} S_n(x)$ *равна*

$$\begin{array}{lll} S_0(x) & \textit{при} & x\in[0,\, v_0],\\ S_5(x) & \textit{при} & x\in[v_0,\, 3\pi/10],\\ S_4(x) & \textit{при} & x\in[3\pi/10,\, 3\pi/8],\\ S_3(x) & \textit{при} & x\in[3\pi/8,\, \pi/2],\\ S_2(x) & \textit{при} & x\in[\pi/2,\, z_1],\\ S_4(x) & \textit{при} & x\in[z_1,\, z_2],\\ S_1(x) & \textit{при} & x\in[z_2,\, \pi]. \end{array}$$

Заметим, что теоремы 1.1, 1.2 и 3.1 для любого $m \ge 0$ при использовании излагаемого метода позволяют на отрезке $[0, \pi]$ найти функции $\min_{n\ge m} S_n(x)$ и $\max_{n\ge m} S_n(x)$, но с увеличением m возрастает и объем вычислений. Например, при $m = 1$ получается следующий результат.

Пусть $v_1 \in (\pi/10, 3\pi/28)$ — единственная точка в этом интервале, в которой $S_{14}(v_1) = S_1(v_1)$. Тогда

$$v_1 = 0,318587203\ldots = \frac{\pi}{9,8610133\ldots}.$$

Теорема 3.2. *Для любого* $x \in [0, \pi]$ *функция*

$$\min_{n\ge 1} S_n(x)$$

равна

$$\begin{array}{lll} S_1(x) & \textit{при} & x\in[0,\, v_1],\\ S_{14}(x) & \textit{при} & x\in[v_1,\, 3\pi/28],\\ S_n(x) & \textit{при} & x\in[3\pi/(2n+2),\, 3\pi/(2n)], \quad n=3,\,4,\,\ldots,\,13,\\ S_2(x) & \textit{при} & x\in[\pi/2,\, z_1],\\ S_4(x) & \textit{при} & x\in[z_1,\, z_2],\\ S_1(x) & \textit{при} & x\in[z_2,\, \pi]. \end{array}$$

Конечно, полученные оценки неулучшаемы.

Библиографический список

1. *Белов А. С.* О примерах тригонометрических рядов с неотрицательными частными суммами // Математический сборник. 1995. Т. 186, № 4. С. 21–46.
2. *Белов А. С.* Об одном методе доказательства неотрицательности всех частных сумм тригонометрического ряда // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2007. Вып. 3. С. 60–71.
3. *Белов А. С.* Исследование положительности всех частных сумм тригонометрического ряда в окрестности нуля // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2008. Вып. 2. С. 63–80.
4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965. 615 с.
5. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 432 с.
6. *Fong J. Z. Yi., Lee T. Y., Rao R. N., Wong P. X.* A functional bound for Young's cosine polynomial II // Publ. Math. Debrecen. 2020. Vol. 96, № 3–4. P. 445–457.
7. *Gasper G.* Nonnegative sums of cosine, ultraspherical and Jacobi polynomials // J. Math. Anal. Appl. 1969. Vol. 26. № 1. P. 60–68.
8. *Rogosinski W., Szegö G.* Über die Abschnitte von Potenzreichen, die in einem Kreise beschrankt bleiben // Math. Zeit. 1928. Vol. 28. P. 73–94.
9. *Young W. H.* On a certain series of Fourier // Proc. Lond. Math. Soc. 1912. Vol. 11. P. 357–366.

УДК 517.5

Л. Н. Кусковский

О ПРОИЗВОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

В вещественном (комплексном) линейном пространстве получены рекуррентные формулы, позволяющие находить частные производные любого порядка от фундаментального решения уравнения Лапласа.

Ключевые слова: оператор Лапласа, оператор Коши — Римана, рекуррентные формулы.

L. N. Kuskovskii

ON THE DERIVATIVES OF POTENTIALS

In a real (complex) linear space, we obtain recurrent formulas that allow us to find partial derivatives of any order from the fundamental solution of the Laplace equation.

Key words: Laplace operator, Cauchy — Riemann operator, recurrence formulas.

Решения многих задач математической физики, дифференциальных уравнений в частных производных, сингулярных интегральных уравнений связаны с нахождением частных производных различных порядков. В настоящей статье мы установим рекуррентные формулы, позволяющие находить производные любого порядка для классических потенциалов.

1. Вещественный случай

Будем использовать следующие обозначения:

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное (n — натуральное число) евклидово пространство;

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — произвольные точки $\mathbb{R}^n$;

$(x, \xi) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$;

$r = |x - \xi| = \left[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + \ldots + (x_n - \xi_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ — расстояние между точками x и ξ;

$\Delta \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ — оператор Лапласа.

Рассмотрим функцию

$$V(x - \xi) = \frac{1}{|x - \xi|^m} = \frac{1}{r^m}, \tag{1.1}$$

где m — любое натуральное число, $x \neq \xi$. Нетрудно найти

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{r^m}\right) = -\frac{m(x_j - \xi_j)}{r^{m+2}}, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{1}{r^m}\right) = -\frac{m}{r^{m+2}} + \frac{m(m+2)(x_j - \xi_j)^2}{r^{m+4}}. \tag{1.3}$$

Отсюда и из (1.3) имеем

$$\Delta V(x-\xi) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{1}{r^m}\right) = -\frac{mn}{r^{m+2}} + \frac{m(m+2)}{r^{m+4}} \sum_{j=1}^{n} (x_j-\xi_j)^2 = \\ = \frac{m}{r^{m+2}}[-n+m+2]. \quad (1.4)$$

Из (1.4) сразу следует, что при $m = n-2$, $n \geqslant 3$ функция (1.1) является решением уравнения Лапласа, т. е. $\Delta V(x-\xi) = 0$, $x \neq \xi$.

Функция $V(x-\xi) = \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}$, $x \neq \xi$, $n \geqslant 3$, называется *сингулярным решением* уравнения Лапласа [3, с. 226]. Напомню

Определение. Функция $v(x)$ называется *гармонической* в конечной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если она дважды непрерывно дифференцируема в Ω и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Гармоническая в $\mathbb{R}^n \setminus (x=\xi)$ функция

$$V(x-\xi) = \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}, \quad n \geqslant 3,$$

называется *фундаментальным решением* уравнения Лапласа [2, с. 233]. В смысле обобщенных функций это означает, что данная функция удовлетворяет уравнению

$$\Delta V(x-\xi) = -(n-2)\sigma_n \delta(x-\xi),$$

где $\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ — площадь поверхности $(n-1)$-мерной единичной сферы, δ — функция Дирака [7, с. 45–46], $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера [5, с. 753].

Теорема. *Для $k = 2\gamma$ или $k = 2\gamma+1$ (k, γ — натуральные числа) имеем*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}\big(V(x-\xi)\big) = \frac{\partial^k}{\partial x_j^k}\left(\frac{1}{r^m}\right) = \sum_{h=0}^{\gamma} a_h^k t_{k-h}(x_j-\xi_j)^{k-2h}, \\ j = 1, 2, \ldots, n, \quad (1.5)$$

где

$$t_k = (-1)^k \frac{m(m+2)\ldots(m+2(k-1))}{r^{m+2k}}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$a_0^k = 1$, a_h^k *— постоянные, вычисляемые по рекуррентным формулам:*

$$\begin{aligned} a_h^{k+1} &= a_h^k + a_{h-1}^k(k-2h+2), \quad h = 1, 2, \ldots, \gamma, \\ a_{\gamma+1}^{k+1} &= a_\gamma^k(k-2\gamma). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Доказательство. При $k=1$ и $k=2$ формула (1.5) справедлива, так как в силу (1.2) и (1.3) имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_j}(r^{-m}) = a_0^1 t_1(x_j-\xi_j), \\ &\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(r^{-m}) = a_0^2 t_2(x_j-\xi_j)^2 + a_1^2 t_1. \end{aligned}$$

Теперь, учитывая, что $\frac{\partial}{\partial x_j}(t_k) = t_{k+1}(x_j - \xi_j)$, и предположив, что формула (1.5) справедлива для некоторого k, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_j^{k+1}}\left(\frac{1}{r^m}\right) &= \sum_{h=0}^{\gamma} a_h^k t_{k+1-h}(x_j - \xi_j)^{k+1-2h} + \\
&\quad + \sum_{h=0}^{\gamma} a_h^k (k-2h) t_{k-h}(x_j - \xi_j)^{k-2h-1} = \\
&= a_0^k t_{k+1}(x_j - \xi_j)^{k+1} + \\
&\quad + \left[a_0^k k + a_1^k\right] t_k (x_j - \xi_j)^{k-1} + \\
&\quad + \left[a_1^k (k-2) + a_2^k\right] t_{k-1} (x_j - \xi_j)^{k-3} + \\
&\quad + \left[a_2^k (k-4) + a_3^k\right] t_{k-2} (x_j - \xi_j)^{k-5} + \\
&\quad \dots \\
&\quad + \left[a_{\gamma-1}^k (k+2-2\gamma) + a_\gamma^k\right] t_{k+1-\gamma} (x_j - \xi_j)^{k+1-2\gamma} + \\
&\quad + a_\gamma^k (k-2\gamma) t_{k-\gamma} (x_j - \xi_j)^{k-2\gamma-1}.
\end{aligned}$$

Отсюда, представив выражения в квадратных скобках согласно (1.6), получим

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_j^{k+1}}\left(\frac{1}{r^m}\right) = \sum_{h=0}^{\gamma+1} a_h^{k+1} t_{(k+1)-h}(x_j - \xi_j)^{k+1-2h}, \quad j = 1,\, 2,\, \dots,\, n,$$

что, согласно методу математической индукции, и доказывает теорему.

2. Комплексный случай

Далее используются следующие обозначения:

$\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство ($n = 1,\, 2,\, \dots$);

$z = (z_1,\, z_2,\, \dots,\, z_n)$, $\zeta = (\zeta_1,\, \zeta_2,\, \dots,\, \zeta_n)$, где $z_j = x_j + iy_j$, $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $j = 1,\, 2,\, \dots,\, n$, $i^2 = -1$, — точки $\mathbb{C}^n$;

$\langle z, \zeta\rangle = (z, \overline{\zeta}) = z_1\overline{\zeta_1} + z_2\overline{\zeta_2} + \ldots + z_n\overline{\zeta_n}$ — эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$;

$|z| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$ — норма вектора z;

$$\begin{aligned}
R = |z - \zeta| &= \left[|z_1 - \zeta_1|^2 + |z_2 - \zeta_2|^2 + \ldots + |z_n - \zeta_n|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left[(z_1 - \zeta_1)\overline{(z_1 - \zeta_1)} + \ldots + (z_n - \zeta_n)\overline{(z_n - \zeta_n)}\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

— расстояние между точками z и ζ ($z \neq \zeta$).

Здесь при дифференцировании удобно пользоваться операторами Коши — Римана [1, с. 105; 6, с. 21–25]:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad j = 1,\, 2,\, \dots,\, n.$$

Рассмотрим функцию

$$U(z - \zeta) = \frac{1}{|z - \zeta|^m} = \frac{1}{R^m} = \left[\sum_{j=1}^{n} (z_j - \zeta_j)\overline{(z_j - \zeta_j)}\right]^{-\frac{m}{2}}, \quad m = 1,\, 2,\, \dots \quad (2.1)$$

и оператор

$$\Delta \equiv 4\left[\frac{\partial^2}{\partial\overline{z_1}\partial z_1} + \frac{\partial^2}{\partial\overline{z_2}\partial z_2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial\overline{z_n}\partial z_n}\right] \tag{2.2}$$

— классический оператор Лапласа (лапласиан) [4, с. 17] в пространстве $\mathbb{C}^n$ (или в $2n$-мерном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$). Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{1}{|z-\zeta|^m}\right) = \frac{\partial}{\partial z_j}\left[\sum_{j=1}^{n}(z_j-\zeta_j)\overline{(z_j-\zeta_j)}\right]^{-\frac{m}{2}} = -\frac{m}{2}\frac{1}{R^{m+2}}\overline{(z_j-\zeta_j)}. \tag{2.3}$$

В силу (2.3) получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial\overline{z_j}\partial z_j}\left(\frac{1}{|z-\zeta|^m}\right) = \frac{m(m+2)}{4}\frac{|z_j-\zeta_j|^2}{R^{m+4}} - \frac{m}{2}\frac{1}{R^{m+2}}.$$

Отсюда и из (2.2)

$$\Delta\left(\frac{1}{R^m}\right) = 4\left[\frac{m(m+2)}{4}\frac{1}{R^{m+4}}\sum_{j=1}^{n}|z_j-\zeta_j|^2 - \frac{nm}{2}\frac{1}{R^{m+2}}\right] =$$
$$= \frac{m}{R^{m+2}}\big[(m+2)-2n\big],$$

откуда сразу следует, что при $m = 2n-2$, $z \neq \zeta$, функция (2.1) является гармонической в любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.

Библиографический список

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 436 с.
2. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.
3. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 576 с.
4. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 456 с.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. 7-е изд. М.: Наука, 1969. 800 с.
6. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Часть 2. Функции нескольких переменных. 2-е изд., перераб. и допол. М.: Наука, 1976. 400 с.
7. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. 2-е изд., перераб. М.: Изд-во МГУ, 1984. 208 с.

УДК 512.543

Е. Д. Логинова, Д. И. Молдаванский

О СВОБОДНЫХ ПОДГРУППАХ И ЦЕНТРЕ *HNN*-РАСШИРЕНИЯ ГРУПП

Получены условия отсутствия нециклических свободных подгрупп в *HNN*-расширениях групп и нетривиальности центра *HNN*-расширений.

Ключевые слова: *HNN*-расширения групп, свободная группа, центр группы.

E. D. Loginova, D. I. Moldavanskii

ON FREE SUBGROUPS AND ON THE CENTER OF AN *HNN*-EXTENSION OF GROUPS

Conditions for the absence of noncyclic free subgroups in *HNN*-extensions of groups and for non-triviality of center of *HNN*-extensions are obtained.

Key words: *HNN*-extensions of groups, free group, center of group.

1. Формулировка результатов и предварительные замечания

Одним из заметных направлений исследований в современной комбинаторной теории групп является изучение свойств групп, построенных с помощью теоретико-групповых конструкций свободного произведения с объединенными подгруппами и HNN-расширения. В этой статье применительно к ним рассматриваются свойство отсутствия нециклических свободных подгрупп и описание строения центра.

Хорошо известно (и нетрудно показать), что свободное произведение $G = \big(A * B;\ U\big)$ групп A и B с объединенной подгруппой U, где $U \neq A$ и $U \neq B$, не содержит нециклических свободных подгрупп тогда и только тогда, когда нециклических свободных подгрупп нет в объединяемой подгруппе U и индекс этой подгруппы в каждом из свободных сомножителей A и B равен числу 2. При тех же предположениях центр $Z(G)$ группы G совпадает с пересечением (лежащим в U) $Z(A) \cap Z(B)$ центров подгрупп A и B (см. [2, следствие 4.5]).

Здесь будут доказаны следующие утверждения:

Теорема 1. *HNN-расширение $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi\big)$ группы G с проходной буквой t и связанными в соответствии с изоморфизмом $\varphi\colon A \to B$ подгруппами A и B не имеет нециклических свободных подгрупп тогда и только тогда, когда хотя бы одна из связанных подгрупп A или B совпадает с базовой группой G и в группе G нет нециклических свободных подгрупп.*

Теорема 2. *Пусть группа $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi\big)$ та же, что в формулировке теоремы 1, и пусть $St(\varphi) = \big\{a \in A \ \big|\ a\varphi = a\big\}$ — множество всех элементов группы A, неподвижных относительно действия отображения φ. Справедливы следующие утверждения о строении центра $Z(G^*)$ группы G^*.*

1. *Если либо*
   - (1.1) *хотя бы одна из связанных подгрупп A или B отлична от группы G, либо*
   - (1.2) *$A = B = G$ и порядок автоморфизма φ группы G по модулю группы $\operatorname{Inn} G$ ее внутренних автоморфизмов бесконечен,*

то $Z(G^*) = Z(G) \cap St(\varphi)$.

2. *Если $A = B = G$, порядок автоморфизма φ группы G по модулю $\operatorname{Inn} G$ конечен и равен числу m и внутренний автоморфизм φ^m производится элементом $c \in G$ (т. е. $x\varphi^m = c^{-1}xc$ для произвольного $x \in G$), причем $c \in St(\varphi)$, то $Z(G^*)$ порождается подгруппой $Z(G) \cap St(\varphi)$ и элементом $t^m c^{-1}$.*

Для большей замкнутости изложения приведем необходимые нам для доказательств известные свойства конструкции HNN-расширения.

Пусть G — некоторая группа с изоморфными подгруппами A и B и $\varphi\colon A \to B$ — фиксированный изоморфизм группы A на группу B. HNN-расширение $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi\big)$ группы G с проходной буквой t и связанными в соответствии с изоморфизмом φ подгруппами A и B можно определить как фактор-группу (обычного) свободного произведения $F = G * \langle t\rangle$ группы G и бесконечной циклической группы с порождающим t по нормальному замыканию N в группе F множества элементов $\big\{t^{-1}at(a\varphi)^{-1} \bigm| a \in A\big\}$. Практически все результаты о строении групп, являющихся HNN-расширениями, получены с использованием двух основных свойств этой конструкции (см., например, [1, теорема IV.2.1]).

Первое из них состоит в том, что $G \cap N = 1$, так что группа G естественным образом вложима в группу G^*, и потому можно считать ее подгруппой группы G^*.

Так как группа G^* порождается подгруппой G и элементом t, то произвольный элемент f этой группы определяется произведением вида

$$f_0t^{\varepsilon_1}f_1t^{\varepsilon_2}f_2\cdots f_{n-1}t^{\varepsilon_n}f_n, \tag{$*$}$$

где $n \geqslant 0$, $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $f_0, f_1, \ldots, f_n$ — элементы группы G. Если для некоторого номера i, $1 \leqslant i < n$, выполнены условия $\varepsilon_i = -1$, $\varepsilon_{i+1} = 1$ и элемент f_i принадлежит подгруппе A, то, поскольку при $f_i' = f_i\varphi$ выполнено включение $t^{-1}g_it(g_i')^{-1} \in N$, элемент f определяется и произведением

$$f_0t^{\varepsilon_1}f_1\cdots t^{\varepsilon_{i-1}}(f_{i-1}f_i'f_{i+1})t^{\varepsilon_{i+2}}f_{i+2}\cdots f_{n-1}t^{\varepsilon_n}f_n,$$

число вхождений буквы t в котором на 2 меньше, чем в $(*)$. Аналогичное преобразование записи $(*)$ выполнимо и в случае, когда при $\varepsilon_i = 1$ и $\varepsilon_{i+1} = -1$ слово f_i определяет элемент из подгруппы B.

Очевидно, что с помощью указанных преобразований (называемых *t-редукциями*) можно для любого элемента $f \in G^*$ получить запись вида $(*)$, к которой t-редукции не применимы. Такая запись элементов группы G^* называется *приведенной*, и второе основное свойство группы G^*, называемое леммой Бриттона, состоит в том, что приведенная запись единичного элемента не содержит вхождений проходной буквы t. Это, говоря подробнее, означает, что если выражение вида $(*)$ при $n > 0$ определяет единицу группы G^*, то к нему должна быть применима хотя бы одна t-редукция.

Вообще говоря, элемент группы G^* может обладать разными приведенными записями. Тем не менее, из того, что

$$f_0t^{\varepsilon_1}f_1t^{\varepsilon_2}f_2\cdots f_{m-1}t^{\varepsilon_m}f_m \quad \text{и} \quad g_0t^{\delta_1}g_1t^{\delta_2}g_2\cdots g_{n-1}t^{\delta_n}g_n$$

— приведенные записи некоторого элемента группы G^*, следует (см. [1, лемма IV.2.3]), что $m = n$ и (при $n \geqslant 1$) для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено равенство $\varepsilon_i = \delta_i$. Число вхождений буквы t в (любой) приведенной записи данного элемента $f \in G^*$ называется *длиной* этого элемента и обозначается через $l(f)$.

HNN-расширение $G^* = \big(G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi\big)$ называется *нисходящим*, если хотя бы одна из связанных подгрупп A или B совпадает с группой G. Если считать (как легко видеть, без потери общности), что $A = G$, то отображение φ оказывается инъективным эндоморфизмом группы G таким, что $G\varphi = B$. В этом случае каждый элемент f группы G^* однозначно представим в виде $f = t^m g t^{-n}$ для некоторого элемента $g \in G$ и некоторых неотрицательных целых m и n, причем при $m > 0$ и $n > 0$ элемент g не входит в подгруппу B.

Если $A = G$ и $B = G$ (и потому φ — автоморфизм группы G), группа G^* является расщепляемым расширением группы G при помощи бесконечной циклической группы $\langle t \rangle$, т. е. $G \trianglelefteq G^*$, $G^* = \langle t \rangle G$ и $\langle t \rangle \cap G = 1$. В этом случае произвольный элемент $f \in G^*$ однозначно представим в виде $t^n g$ для некоторых $n \in \mathbb{Z}$ и $g \in G$.

2. Доказательства теорем

Предполагая, что каждая из подгрупп A и B не совпадает с базовой группой G, выберем в этой группе элементы f и g, не принадлежащие соответственно подгруппам A и B. Тогда элементы $u = t^{-1} f t^2$ и $v = t^2 g t^{-1}$ являются свободными порождающими порожденной ими подгруппы в группе G^*.

В самом деле, непосредственно проверяется, что записи каждого из элементов u^2, v^2, uv, vu, uv^{-1}, $u^{-1}v$ не допускают t-редукций. Отсюда следует, очевидно, что любое непустое и несократимое слово от элементов u и v обладает приведенной записью положительной длины и потому отлично от единицы группы G^*.

Необходимость сформулированных в теореме 1 условий отсутствия в группе G^* нециклических свободных подгрупп теперь очевидна.

Обратно, предположим, что подгруппа A совпадает с группой G (т. е. группа $G^* = \big(G, t;\ t^{-1} g t = g\varphi\ (g \in G)\big)$ является нисходящим HNN-расширением группы G) и что группа G не имеет нециклических свободных подгрупп.

Очевидно, что фактор-группа G^*/N группы G^* по нормальному замыканию N в группе G^* подгруппы G является бесконечной циклической группой. Строение подгруппы N имеет следующее простое описание.

Для произвольного целого числа $k \geqslant 0$ полагаем $G_k = t^k G t^{-k}$. Тогда для любого k подгруппа G_k группы G^* изоморфна группе G и содержится в подгруппе G_{k+1}, а подгруппа N совпадает с объединением $\bigcup_{k=0}^{\infty} G_k$ подгрупп G_k.

В самом деле, включение $G_k \subseteq G_{k+1}$ практически очевидно, поскольку для любого элемента $u \in G_k$ имеем $u = t^k g t^{-k}$ для некоторого $g \in G$, откуда

$$u = t^k g t^{-k} = t^k (t(g\varphi)t^{-1}) t^{-k} = t^{k+1} (g\varphi) t^{-(k+1)},$$

так что $u \in G_{k+1}$.

Включение $\bigcup_{k=0}^{\infty} G_k \subseteq N$ является очевидным следствием определения подгруппы N как наименьшей из нормальных подгрупп группы G^*, содержащих подгруппу G, а для доказательства противоположного включения достаточно, в силу того же определения, показать, что подгруппа $\bigcup_{k=0}^{\infty} G_k$ нормальна в G^*.

Произвольный элемент u этой подгруппы имеет вид $u = t^k g t^{-k}$, где $k \geqslant 0$ и $g \in G$. Как отмечено выше, произвольный элемент v группы G^*

имеет запись вида $v = t^m f t^{-n}$, где $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$ и $f \in G$. Поскольку тогда

$$\begin{aligned} v^{-1}uv &= (t^n f^{-1} t^{-m})(t^k g t^{-k})(t^m f t^{-n}) \\ &= (t^n f^{-1})\big(t^k (g\varphi^m) t^{-k}\big)(f t^{-n}) \\ &= t^{n+k}\big((f\varphi^k)^{-1}(g\varphi^m)(f\varphi^k)\big) t^{-(n+k)}, \end{aligned}$$

имеем $v^{-1}uv \in H$, и нормальность подгруппы $\bigcup_{k=0}^{\infty} G_k$ доказана.

Предположим теперь, рассуждая от противного, что некоторая подгруппа F группы G^* является свободной группой ранга 2. Включение $F \subseteq N$ невозможно, поскольку в силу конечной порожденности подгруппы F оно означало бы включение $F \subseteq G_k$ для некоторого $k \geqslant 0$. Следовательно, подгруппа FN/N бесконечной циклической группы G^*/N является бесконечной циклической, пересечение $H = F \cap N$ является неединичной свободной и потому циклической подгруппой группы N, и группа F оказывается расширением бесконечной циклической группы при помощи бесконечной циклической. Так как для свободных групп это невозможно, доказательство теоремы 1 закончено.

Переходя к доказательству теоремы 2, заметим прежде всего, что если группа G содержит элемент g, не принадлежащий, скажем, подгруппе A, то все центральные элементы группы G^* лежат в подгруппе G.

В самом деле, если, напротив,

$$f_0 t^{\varepsilon_1} f_1 t^{\varepsilon_2} f_2 \cdots f_{m-1} t^{\varepsilon_m} f_m$$

— приведенная запись центрального элемента f, где $m > 0$, то можно считать, во-первых (заменив, если нужно, элемент f на f^{-1}), что для некоторого номера i показатель ε_i равен 1, и, во-вторых (поскольку f совпадает с любым элементом, сопряженным с ним), что $\varepsilon_1 = 1$ и $f_0 = 1$. Но тогда запись

$$f_m^{-1} t^{-\varepsilon_m} f_{m-1}^{-1} \cdots f_2^{-1} t^{-\varepsilon_2} f_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} g t^{\varepsilon_1} f_1 t^{\varepsilon_2} f_2 \cdots f_{m-1} t^{\varepsilon_m} f_m$$

элемента $f^{-1}gf$ является приведенной и потому равенство $f^{-1}gf = g$ невозможно.

Таким образом, для любого центрального элемента $f \in G^*$ выполнено включение $f \in Z(G)$, а также, поскольку $t^{-1}ft = f$, и включение $g \in St(\varphi)$. Следовательно, $Z(G^*) \subseteq Z(G) \cap St(\varphi)$, и так как противоположное включение очевидно, справедливость равенства $Z(G^*) = Z(G) \cap St(\varphi)$ при условии (1.1) доказана.

Предположим теперь, что $A = G = B$. Тогда отображение φ является автоморфизмом группы G и, как отмечено выше, группа G^* является расщепляемым расширением группы G при помощи циклической группы, порождаемой элементом t. В частности, произвольный элемент $f \in G^*$ однозначно представим в виде $f = t^n g$ для некоторого целого n и некоторого $g \in G$.

Очевидно, что и в этом случае подгруппа $Z(G) \cap St(\varphi)$ содержится в центре группы G^* и потому совпадает с пересечением $G \cap Z(G^*)$. Утверждается, кроме того, что элемент $f = t^n g$ принадлежит центру группы G^* тогда и только тогда, когда $g \in St(\varphi)$ и φ^n является внутренним автоморфизмом, производимым элементом g^{-1}.

Действительно, непосредственно проверяется, что перестановочность элемента f с элементом t равносильна включению $g \in St(\varphi)$, а перестановочность f с элементом $x \in G$ равносильна равенству $x\varphi^n = gxg^{-1}$.

Следовательно, при условии (1.2) из того, что $f = t^n g \in Z(G^*)$, следует, что $n = 0$, и потому равенство $Z(G^*) = Z(G) \cap St(\varphi)$ выполнено и в этом случае.

Предположим теперь, что порядок автоморфизма φ по модулю подгруппы $\operatorname{Inn} G$ конечен и равен числу m, и пусть внутренний автоморфизм φ^m производится элементом $c \in St(\varphi)$. Тогда элемент $f = t^m c^{-1}$ является центральным, и нетрудно видеть, что центр группы G^* порождается элементом f и подгруппой $Z(G) \cap St(\varphi)$.

Пусть, в самом деле, $g = t^n d$ (где $d \in G$) — произвольный центральный элемент группы G^*. Разделим n на m с остатком: $n = mq + r$ и $0 \leqslant r < m$. С учетом перестановочности элемента t с элементами c и d имеем $gf^{-q} = t^r(dc^q)$. Так как элемент gf^{-1} является центральным, при $r > 0$ автоморфизм φ^r должен быть внутренним, что невозможно, так как $r < m$. Следовательно, $r = 0$ и потому элемент $gf^{-q} = dc^q$ входит в подгруппу $G \cap Z(G^*) = Z(G) \cap St(\varphi)$. Таким образом, элемент $g = (dc^q)f^q$ принадлежит подгруппе, порожденной подгруппой $Z(G) \cap St(\varphi)$ и элементом f, и теорема 2 доказана.

Библиографический список

1. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980. 448 с.
2. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 456 с.

УДК 510.5

Б. Я. Солон

m-СВОДИМОСТЬ ЧАСТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

В статье рассматривается стандартное понятие m-сводимости множеств, примененное к арифметическим функциям. При этом возникает понятие m-сводимости функций, близкое к сводимости частично-рекурсивных функций, введенной А. Н. Дёгтевым в 1975 году.

Ключевые слова: m-сводимость, m-степень.

B. Ya. Solon

m-REDUCIBILITY OF PARTIAL FUNCTIONS

The article discusses the standard concept of m-reducibility of sets applied to arithmetic functions. This gives rise to a notion of m-reducibility of functions, which is close to the reducibility of partially recursive functions introduced by A. N. Dëgtev in 1975.

Key words: m-reducibility, m-degree.

Будем называть *множествами* подмножества множества натуральных чисел $\omega = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ и *функциями* — одноместные функции, определенные на множестве ω (или на его подмножествах) со значениями во множестве ω. В статье вместо термина «*рекурсивная функция*» используется синоним «*вычислимая функция*», вместо «*рекурсивное множество*» — термин «*вычислимое множество*». Говорят, что множество A *m-сводится* к множеству B, если существует всюду определенная вычислимая функция f такая, что $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ для всех $x \in \omega$. В этом случае говорят, что множество A m-сводится к множеству B *посредством функции* $f(x)$. Будем говорить «вычислимая функция» в любом случае, и когда она всюду определенная (тотальная), и когда она частичная. В конкретных случаях будем добавлять при необходимости «всюду определенная» или «частичная».

Цель нашей работы — изучение алгоритмической сводимости на одноместных функциях, которая явным образом связана с m-сводимостью множеств. Ранее А. Н. Дёгтев [1] рассматривал подобную сводимость только на множестве частично вычислимых функций, в статье [2] она получила название «*F-сводимость частично вычислимых функций*».

Пусть PF — множество одноместных функций, для $\psi \in PF$ обозначим через $\delta\psi$ область определения, через $\rho\psi$ множество значений и через

$$\tau\psi = \big\{\langle x, y\rangle : x \in \delta\psi \wedge \psi(x) = y\big\}$$

график функции ψ. Тот факт, что $x \in \delta\psi$, т. е. значение $\psi(x)$ определено, будем обозначать через $\psi(x){\downarrow}$, а $x \notin \delta\psi$ — через $\psi(x){\uparrow}$. Далее α, β, ψ, $\eta \in PF$. Если $\delta\psi = \omega$, то функцию $\psi(x)$ будем называть *тотальной*.

Пусть A — фиксированное непустое множество, обозначим через PF_A множество функций с областью значений A. Перенесем определение А. Н. Дёгтева на все функции из PF.

Определение 1. Функция $\alpha(x)$ *F-сводится к функции* $\beta(x)$, если существует вычислимая функция $f(x)$ такая, что $\alpha(x) = \beta(f(x))$ для всех $x \in \omega$. Обозначим факт F-сводимости α к β через $\alpha \leqslant_F \beta$.

В определении 1 равенство $\alpha(x) = \beta(f(x))$ мы понимаем в следующем толковании: если $\alpha(x){\downarrow}$, то $f(x) \in \delta\beta$ и $\alpha(x) = \beta(f(x))$, а если $\alpha(x){\uparrow}$, то $f(x) \notin \delta\beta$. В следующих леммах зафиксируем ряд простых свойств F-сводимости функций.

Лемма 1. $\alpha \leqslant_F \beta \Leftrightarrow$
$[\delta\alpha \leqslant_m \delta\beta$ *посредством вычислимой функции* $f(x)] \wedge \alpha(x) = \beta(f(x))$.

Доказательство. Пусть $\alpha \leqslant_F \beta$, тогда для некоторой вычислимой функции $f(x)$ выполнено $\alpha(x) = \beta(f(x))$ для всех $x \in \omega$. Это равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\forall x[x \in \delta\alpha \Leftrightarrow f(x) \in \delta\beta]$. Последнее условие означает, что $\delta\alpha \leqslant_m \delta\beta$ посредством функции $f(x)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $\delta\alpha \neq \omega$ *и* $\delta\beta = \omega$, *то* $\alpha \nleqslant_F \beta$.

Доказательство. Предположим, что $\alpha \leqslant_F \beta$, тогда $\alpha(x) = \beta(f(x))$, откуда, в частности, следует, что $\omega \neq \delta\alpha = \delta(\beta f) = \omega$. Получили противоречие, следовательно, $\alpha \nleqslant_F \beta$.

Легко проверить, что бинарное отношение $\leqslant_F$ на множестве PF рефлексивно и транзитивно. Обычным образом определяется F-степень функции $\alpha(x)$:

$$d_F(\alpha) = \{\psi : \alpha \leqslant_F \psi \wedge \psi \leqslant_F \alpha\}.$$

Лемма 3. *Если $A = \rho\alpha$, то для любой функции $\psi \in d_F(\alpha)$ выполнено $A = \rho\psi$.*

Доказательство. Пусть $\psi \in d_F(\alpha)$. Если $\alpha \leqslant_F \psi$ посредством некоторой вычислимой функции $f(x)$, т. е. $\alpha(x) = \psi(f(x))$, то $A = \rho\alpha \subseteq \rho\psi$. Если $\psi \leqslant_F \alpha$ посредством некоторой вычислимой функции $g(x)$, т. е. $\psi(x) = \alpha(g(x))$, то $\rho\psi \subseteq \rho\alpha = A$. Следовательно, $A = \rho\psi$, и лемма доказана.

Совокупность F-степеней функций, имеющих одну и ту же область значений A, с естественно определенным частичным порядком $\leqslant$ обозначим через $L_F(A)$. При этом, по определению, полагаем

$$d_F(\alpha) \leqslant d_F(\beta) \Leftrightarrow \alpha \leqslant_F \beta.$$

Лемма 4. *Для любой частично вычислимой функции $\varphi \in PF_A$ и любой $\psi \in PF_A$,*

(i) если $\psi \leqslant_F \varphi$, то ψ — вычислимая функция;

(ii) если $\delta\varphi \neq \omega$ — вычислимое множество, $|A| = 1$ и $\delta\psi \neq \omega$, то $\varphi \leqslant_F \psi$.

Доказательство. (i). Из определения 1 следует, что в этом случае $\psi(x) = \varphi(f(x))$ для некоторой вычислимой функции $f(x)$. Следовательно, $\psi(x)$ — вычислимая функция как суперпозиция двух вычислимых функций.

(ii). Пусть $\delta\varphi = B \neq \omega$ — вычислимое множество, $c \in \delta\psi$ и $d \notin \delta\psi$. Определим вычислимую функцию

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{если } x \in B, \\ d, & \text{если } x \notin B. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, равенство $\varphi(x) = \psi f(x)$ выполнено для всех $x \in \omega$. Следовательно, $\varphi \leqslant_F \psi$.

Следствие 1. *Любая F-степень, содержащая вычислимую функцию, состоит из вычислимых функций.*

Обозначим через L_F^{pc} частично упорядоченное множество F-степеней, состоящих из частично вычислимых функций. Из следствия 1 вытекает, что для любого вычислимо перечислимого множества A частично упорядоченное множество $L_F^{pc}(A)$ образует начальный сегмент в $L_F(A)$. В статьях [1, 2] изучаются свойства $L_F^{pc}(A)$, в частности, доказано, что $L_F^{pc}(A)$ является верхней полурешеткой.

Теорема 1. *Любая F-степень $d_F(\alpha)$ состоит либо только из тотальных функций, либо только из частичных функций с m-эквивалентными областями определения (отличными от ω).*

Доказательство. Пусть $d_F(\psi)$ содержит тотальную функцию $h(x)$, тогда, в частности, $\psi \leqslant_F h$. Из леммы 2 следует, что функция ψ при этом не может быть частичной. Следовательно, $d_F(h)$ состоит только из тотальных функций. Теорема доказана.

Определение 2. F-степень $d_F(\alpha)$ называется *тотальной*, если она содержит хотя бы одну всюду определенную функцию.

Из теоремы 1 следует, что тотальные F-степени состоят только из тотальных функций.

Свойства $L_F(A)$ зависят от множества A. Например, если $|A| = 1$, допустим, $A = \{0\}$, то $L_F(\{0\})$ и L_m — частично упорядоченное множество m-степеней — изоморфны. В самом деле, установим отображение

$$\lambda\colon L_F(\{0\}) \to L_m, \quad \lambda(d_F(\alpha)) = d_m(\delta\alpha).$$

Ясно, что λ — биекция, и для любых функций $\alpha, \beta \in PF_{\{0\}}$ имеем

$$d_F(\alpha) \leqslant d_F(\beta) \Leftrightarrow \alpha \leqslant_F \beta \Leftrightarrow \delta\alpha \leqslant_m \delta\beta \Leftrightarrow d_m(\delta\alpha) \leqslant d_m(\delta\beta).$$

В частности, существуют F-степени, состоящие из вычислимых функций, причем они образуют подполурешетку частично упорядоченного множества $L_F(\{0\})$. Из теоремы 1 следует, что тотальные F-степени, состоящие из вычислимых функций, образуют нижний сегмент этой подполурешетки.

Теорема 2. *Если A и B — два бесконечных вычислимо перечислимых множества, то $L_F(A)$ и $L_F(B)$ изоморфны.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $A = \omega$ и $B = \rho h$ для некоторой вычислимой 1−1 функции h. Определим отображение $\theta\colon L_F(A) \to L_F(B)$, полагая для любой F-степени $d_F(\alpha) \in L_F(A)$

$$\theta(d_F(\alpha)) = d_F(h\alpha).$$

Проверим, что $\theta\colon L_F(A) \to L_F(B)$ — изоморфизм полурешеток.

Сначала проверим корректность определения, т. е. покажем, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in PF_A$

$$\alpha_1 \equiv_F \alpha_2 \to h\alpha_1 \equiv_F h\alpha_2.$$

Пусть $\alpha_1 \leqslant_F \alpha_2$, тогда $\alpha_1(x) = \alpha_2(f(x))$ для некоторой вычислимой функции f. Так как h является 1−1 функцией, то $h\alpha_1(x) = h\alpha_2(f(x))$, откуда следует, что $h\alpha_1 \leqslant_F h\alpha_2$. Далее, так как по условию $\rho\alpha = A = \omega$, $\theta\alpha = h\alpha \in PF_B$, поэтому $\theta\colon L_F(A) \to L_F(B)$ — корректно определенное отображение. Из выше доказанной корректности определения отображения θ следует, что θ монотонно относительной отношения $\leqslant$ на степенях из $L_F(B)$.

Осталось доказать инъективность отображения $\theta\colon L_F(A) \to L_F(B)$. Для этого достаточно показать, что если $h\alpha_1 \leqslant_F h\alpha_2$, то $\alpha_1 \leqslant_F \alpha_2$. Пусть $h\alpha_1(x) = h\alpha_2(f(x))$ для некоторой вычислимой функции $f(x)$. По условию h является всюду определенной вычислимой 1−1 функцией, поэтому функция $h^{-1}(x) = \mu y[h(y) = x]$ является (частичной) вычислимой функцией. При этом функция $h^{-1}(h(x)) = x$ определена для всех $x \in \omega$. Следовательно,

$$h\alpha_1(x) = h\alpha_2(f(x)) \Leftrightarrow h^{-1}h\alpha_1(x) = h^{-1}h\alpha_2(f(x)) \Leftrightarrow \alpha_1(x) = \alpha_2(f(x)),$$

т. е. $\alpha_1 \leqslant_F \alpha_2$. Теорема доказана.

Если множество A не является вычислимо перечислимым, то $L_F(A)$ не содержит ни одной F-степени, содержащей вычислимые функции. Это следует из того простого факта, что область значений любой вычислимой функции является вычислимо перечислимым множеством.

Докажем, что для всех $A \neq \varnothing$ частично упорядоченное множество $L_F(A)$ является верхней полурешеткой. Сначала дадим

Определение 3. Частично упорядоченное множество $(L; \leqslant)$ образует *верхнюю полурешетку*, если для любых $a, b \in L$ существует $c = \sup\{a, b\} \in L$. В этом случае элемент $c \in L$ называется *точной верхней границей* элементов $a, b \in L$.

Теорема 3. *Для любого множества $A \neq \varnothing$ частично упорядоченное множество $L_F(A)$ образует верхнюю полурешетку.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a} = d_F(\alpha)$ и $\boldsymbol{b} = d_F(\beta)$ — две произвольные F-степени из $L_F(A)$. Определим функцию $\gamma(x)$:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \alpha(x/2), & \text{если } x \text{ — четное и } \alpha(x/2)\downarrow, \\ \beta((x-1)/2), & \text{если } x \text{ — нечетное и } \beta((x-1)/2)\downarrow. \end{cases}$$

Докажем, что $\boldsymbol{c} = d_F(\gamma) = \sup\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$. Для этого поверим, что $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{c}$ и $\forall \boldsymbol{x}[\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{x}]$. Имеем очевидные равенства $\alpha(x) = \gamma(2x)$ и $\beta(x) = \gamma(2x+1)$ для всех $x \in \omega$. Поэтому $\alpha \leqslant_F \gamma$ посредством вычислимой функции $f(x) = 2x$ и $\beta \leqslant_F \gamma$ посредством вычислимой функции $g(x) = 2x + 1$. Пусть $\alpha \leqslant_F \sigma$ посредством вычислимой функции $h_1(x)$ и $\beta \leqslant_F \sigma$ посредством вычислимой функции $h_2(x)$, т. е. $\alpha(x) = \sigma(h_1(x))$ и $\beta(x) = \sigma(h_2(x))$. Докажем, что $\gamma \leqslant_F \sigma$. Определим функцию

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x/2), & \text{если } x \text{ — четное}, \\ h_2((x-1)/2), & \text{если } x \text{ — нечетное}. \end{cases}$$

Ясно, что $h(x)$ — вычислимая функция, легко проверяется, что $\gamma(x) = \sigma(h(x))$ для всех $x \in \omega$. Теорема доказана.

Определение 4. Пусть $(L; \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Элемент $o \in L$ называется *наименьшим элементом множества* L, если $\forall x[x \in L \to o \leqslant x]$.

Лемма 5. *Если F-степень $\boldsymbol{m} = d_F(\mu)$ является наименьшим элементом частично упорядоченного множества $L_F(A)$, то она является тотальной.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{m} = d_F(\mu) \leqslant d_F(\alpha)$ для любой функции $\alpha(x)$. В частности, $\alpha(x)$ может быть тотальной функцией. В этом случае функция $\mu(x)$ не может быть частичной в силу леммы 2, т. е. $\mu(x)$ является тотальной функцией. Следовательно, если F-степень $\boldsymbol{m} = d_F(\mu)$ является наименьшим элементом частично упорядоченного множества $L_F(A)$, то она является тотальной. Лемма доказана.

Теорема 4. *Для любого конечного множества $A \neq \varnothing$ частично упорядоченное множество $L_F(A)$ обладает наименьшим элементом.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ и $\alpha \in PF_A$ — произвольная функция. Сначала заметим, что если $L_F(A)$ обладает наименьшим элементом, то он — тотальная F-степень $\boldsymbol{m} = d_{wm}(\mu)$. Определим функцию $\mu(x) = a_i$, где $x \equiv i \pmod{n}$ и $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Докажем, что $\mu \leqslant_F \alpha$ для любой $\alpha \in PF_A$. Ясно, что $\mu(x)$ — тотальная вычислимая функция.

Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in \delta\alpha$ — такие значения x, что $\alpha(x_i) = a_i$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Так как $\alpha \in PF_A$, то эти значения обязательно найдутся. Мы зафиксируем какие-нибудь из них. Определим функцию $f(x)$ с помощью следующего алгоритма: $f(x) = x_i \Leftrightarrow \mu(x) = a_i$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Ясно, что $f(x)$ — вычислимая функция, как и функция $\mu(x)$.

Осталось доказать, что $\mu(x) = \alpha(f(x))$ для всех $x \in \omega$. В самом деле, пусть $x \equiv i \pmod{n}$ для некоторого $i = 0, 1, \ldots, n-1$, тогда $\mu(x) = a_i$. С другой стороны, при этом $f(x) = x_i$ и $\alpha(x_i) = a_i$, т. е. $\alpha(f(x)) = a_i$. Следовательно, $\mu \leqslant_F \alpha$ посредством вычислимой функции $f(x)$. Таким образом, доказано, что $\boldsymbol{m} = d_F(\mu)$ — наименьший элемент верхней полурешетки $L_F(A)$. Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай, когда $|A| = 1$. Пусть для определенности $A = \{0\}$ и $o(x) = 0$ для всех $x \in \omega$. Докажем, что $o \leqslant_F \alpha$ для любой функции $\alpha \in PF_{\{0\}}$. Пусть $\alpha(a) = 0$ для некоторого $a \in \omega$. Такое число обязательно найдется, так как по условию $\rho\alpha = \{0\}$. Определим функцию $f(x) = a$ для всех $x \in \omega$. Очевидно, $o(x) = \alpha(f(x))$ для всех $x \in \omega$. Это означает, что $o \leqslant_F \alpha$ и $d_F(o) \leqslant d_F(\alpha)$, т. е. $d_F(o)$ является наименьшим элементом в $L_F(\{0\})$.

Опишем F-степень $d_F(o)$. Докажем, что она состоит только из одной функции $o(x)$. В самом деле, если $\alpha \leqslant_F o$, то существует вычислимая функция $f(x)$ такая, что $\alpha(x) = o(f(x))$ для всех $x \in \omega$. Однако, ясно, что для любой функции $f(x)$ при этом $\alpha(x) = 1$ для всех $x \in \omega$.

Если исключить из множества $PF_{\{0\}}$ функцию $o(x)$, то вопрос о наименьшей F-степени решают следующие рассуждения. Пусть $\alpha, \beta \in PF_{\{0\}}$ — произвольные функции с вычислимой областью определения, отличные от $o(x)$, докажем, что $\alpha \equiv_F \beta$. Пусть $\delta\alpha = A$ и $\overline{\delta\alpha} = B$. По условию, оба множества A и B вычислимы и непусты, причем $A \cup B = \omega$. Пусть $\beta(a) = 0$ и $\beta(b)\uparrow$, такие a и b существуют по нашему предположению. Определим функцию $f(x)$ с помощью следующего алгоритма. Пусть c — произвольное число, проверим $c \in A$? Если «да», т. е. $c \in A$, полагаем $f(x) = a$. Если «нет», т. е. $c \notin A$, полагаем $f(x) = b$. Ясно, что $f(x)$ — вычислимая всюду определенная функция. Легко убедиться, что $\alpha(x) = \beta(f(x))$ для всех $x \in \omega$. Это означает, что $\alpha \leqslant_F \beta$. Аналогично доказывается, что $\alpha \geqslant_F \beta$. Итак, все функции с вычислимой областью определения, отличные от $o(x)$, образуют одну F-степень. Обозначим эту F-степень через $\boldsymbol{v}$.

Докажем, что $\boldsymbol{v} \leqslant d_F(\gamma)$ для любой функции $\gamma \in PF_{\{0\}} - \{o\}$. Пусть $\alpha \in \boldsymbol{v}$, $\delta\alpha = A$ и $\overline{\delta\alpha} = B$. Пусть $\gamma(a) = 0$ и $\gamma(b)\uparrow$, такие a и b существуют по нашему предположению. Определим функцию $f(x)$ с помощью следующего алгоритма. Пусть c — произвольное число, проверим $c \in A$? Если «да», т. е. $c \in A$, полагаем $f(x) = a$. Если «нет», т. е. $c \notin A$, полагаем $f(x) = b$. Ясно, что $f(x)$ — вычислимая всюду определенная функция. Легко убедиться, что $\alpha(x) = \gamma(f(x))$ для всех $x \in \omega$. Это означает, что $\alpha \leqslant_F \gamma$.

Представляет интерес вопрос о существовании наименьших элементов в верхних полурешетках $L_F(A)$ для различных бесконечных множеств $A \subseteq \omega$.

Сводимость функций может быть определена традиционным способом с помощью хорошо изученных алгоритмических сводимостей множеств. В частности, можно использовать m-сводимость.

Определение 5. Функция $\alpha(x)$ *m-сводится к функции* $\beta(x)$, если существует вычислимая функция $f(x)$ такая, что $x \in \tau\alpha \leftrightarrow f(x) \in \tau\beta$ для всех $x \in \omega$. Обозначим факт m-сводимости α к β через $\alpha \leqslant_m \beta$.

Связь между сводимостями $\leqslant_m$ и $\leqslant_F$ на функциях из $PF_{\{0\}}$ дает следующая теорема. Для случая произвольного множества A взаимосвязь между сводимостями $\leqslant_m$ и $\leqslant_F$ на функциях из PF_A ранее не изучалась.

Теорема 5. *$\alpha \leqslant_m \beta \Leftrightarrow \alpha \leqslant_F \beta$ для любых функций $\alpha, \beta \in PF_{\{0\}}$.*

Доказательство. $\Rightarrow$: Пусть $\alpha, \beta \in PF_{\{0\}}$ и вычислимая функция g такова, что $z \in \tau\alpha \leftrightarrow g(z) \in \tau\beta$ для всех $z \in \omega$. Пусть $z = \langle x, 0\rangle \in \tau\alpha$, т. е. $\alpha(x) = 0$, тогда $g(\langle x, 0\rangle) \in \tau\beta$, т. е. $\beta\big(\big\langle g(\langle x, 0\rangle)\big\rangle_1\big) = 0 = \alpha(x)$. Если $z = \langle x, 0\rangle \notin \tau\alpha$, т. е. $\alpha(x)\uparrow$, тогда $g(\langle x, 0\rangle) \notin \tau\beta$, т. е. $\beta\big(\big\langle g(\langle x, 0\rangle)\big\rangle_1\big)\uparrow$. В самом деле, если $\beta\big(\big\langle g(\langle x, 0\rangle)\big\rangle_1\big)\downarrow$, то из условия $\beta \in PF_{\{0\}}$ следует, что $\beta\big(\big\langle g(\langle x, 0\rangle)\big\rangle_1\big) = 0$ и тогда $g(\langle x, 0\rangle) \in \tau\beta$. Это противоречит нашему предположению.

Пусть $f(x) = \big\langle g(\langle x, 0\rangle)\big\rangle_1$. Ясно, что $f(x)$ — вычислимая функция, как и $g(z)$. Кроме того, установлено, что $\alpha(x) = \beta(f(x))$ для всех $x \in \omega$. Это означает, что $\alpha \leqslant_F \beta$.

$\Leftarrow$: Пусть $\alpha \leqslant_F \beta$, тогда $\alpha(x) = \beta(f(x))$ для некоторой вычислимой функции $f(x)$. В соответствие с леммой 1 в этом случае $\delta\alpha \leqslant_m \delta\beta$ посредством вычислимой функции $f(x)$. Тогда

$$\big[x \in \delta\alpha \leftrightarrow f(x) \in \delta\beta\big] \leftrightarrow \big[\langle x, 0\rangle \in \tau\alpha \leftrightarrow \langle f(x), 0\rangle \in \tau\beta\big].$$

Пусть $z = \langle x, y\rangle$, определим функцию

$$h(z) = h\big(\langle x, y\rangle\big) = \begin{cases} \langle f(x), 0\rangle, & \text{если } y = 0, \\ \langle x, 1\rangle, & \text{если } y \neq 0. \end{cases}$$

Из выше сказанного и того, что $\beta \in PF_{\{0\}}$, следует, что для всех $z \in \omega$

$$z \in \tau\alpha \leftrightarrow h(z) \in \tau\beta.$$

Отсюда следует, что $\alpha \leqslant_m \beta$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 и леммы 2 следует, что тотальные F-степени образуют в верхней полурешетке $L_F(A)$ подполурешетку $T(A)$. Другими словами, это означает, что для любых $\boldsymbol{a} = d_F(\alpha)$, $\boldsymbol{b} = d_F(\beta) \in L_F(A)$ выполнены следующие условия:

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in T(A) \to \boldsymbol{c} = \sup\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \in T(A),$$
$$\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b} \in T(A) \to \boldsymbol{a} \in T(A).$$

Нетотальные F-степени не могут, как было показано в лемме 5, быть наименьшими элементами в $L_F(A)$ для любого множества A. Однако, если рассматривать частично упорядоченное множество $L_F(A)\backslash T(A)$, то можно ставить вопрос о существовании в нем минимальных элементов.

Определение 6. Пусть $f \in PF_A$ — тотальная функция. F-степень $\boldsymbol{a} = d_F(\alpha) \in L_F(A)$ называется *f-квазиминимальной*, если $f \leqslant_F \alpha$, $\alpha \nleqslant_F f$ и $\forall g[g \leqslant_F \alpha \to g \leqslant_F f]$. Если f — вычислимая функция, то $\boldsymbol{a} = d_F(\alpha)$ называется *квазиминимальной F-степенью.*

Заметим, что если $|A| = 1$, то все нетотальные F-степени из $L_F(A)$ являются квазиминимальными. Если множество A не является вычислимо перечислимым, то $L_F(A)$ не содержит квазиминимальных F-степеней, так как в этом случае $L_F(A)$ не имеет степеней, содержащих вычислимые функции.

В следующей теореме докажем одно достаточное условие квазиминимальности F-степени из $L_F(A)$ для случая, когда множество A является вычислимо перечислимым.

Теорема 6. *Если $\delta\alpha$ — иммунное множество, то $d_F(\alpha)$ является квазиминимальной в $L_F(A)$.*

Доказательство. Пусть функция $\alpha \in PF_A$ имеет иммунную область определения $\delta\alpha$, т. е. множество $\delta\alpha$ не содержит бесконечных вычислимо перечислимых подмножеств. Ясно, что при этом функция α не может быть частично вычислимой.

Рассмотрим сначала случай, когда множество A конечно. Допустим, что $d_F(\alpha)$ не является квазиминимальной, тогда существует невычислимая функция g такая, что $g \leqslant_F \alpha$. Пусть h — такая вычислимая функция, для которой $g(x) = \alpha h(x)$ для всех $x \in \omega$. Ясно, что при этом $\rho h \subseteq \delta\alpha$, следовательно, множество ρh, как подмножество иммунного множество, является конечным. Тогда существует конечная подфункция $\widetilde{\alpha}$ функции α такая, что $g(x) = \widetilde{\alpha}h(x)$ для всех $x \in \omega$. Отсюда следует, что $g(x)$ — вычислимая функция, что противоречит нашему предположению. Следовательно, в этом случае $d_F(\alpha)$ является квазиминимальной.

Пусть теперь A — бесконечное вычислимо перечислимое множество. Покажем, что в этом случае невозможна сводимость $g \leqslant_F \alpha$. Действительно, если $g(x) = \alpha h(x)$ для некоторой вычислимой функции $h(x)$, то $|\rho h| < \infty$ и, следовательно, $|\rho(\alpha h)| < \infty$. С другой стороны, $\rho g = A$ — бесконечное множество, поэтому равенство $g(x) = \alpha h(x)$ невозможно, что противоречит предположению. В этом случае имеем тривиальное выполнение определения квазиминимальности F-степени $d_F(\alpha)$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Если A — вычислимо перечислимое множество, то $L_F(A)$ содержит континуум квазиминимальных F-степеней.*

Библиографический список

1. *Дёгтев А. Н.* Сводимость частично рекурсивных функций // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 5. С. 970–988.
2. *Дёгтев А. Н.* Сводимость частично рекурсивных функций. II // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 4. С. 765–774.

УДК 612.017

М. О. Баринова, С. В. Королева, В. Н. Зарипов

ОСОБЕННОСТИ ПСИХОЛОГИЧЕСКОГО СТАТУСА У КУРСАНТОВ-СПАСАТЕЛЕЙ МУЖСКОГО И ЖЕНСКОГО ПОЛА

Представлены результаты исследования психологического статуса курсантов-спасателей мужского и женского пола в условиях повседневной учебной деятельности. Для оценки психологического статуса использовали копинг-тест Лазаруса и тест Айзенка.

Ключевые слова: психологический статус курсантов, копинг-тест Лазаруса, тест Айзенка.

M. O. Barinova, C. V. Koroleva, V. N. Zaripov

SPECIFITY OF PSYCHOLOGICAL STATUS AT MAN'S AND WOMEN'S CADETS-RESCUERS

The results of study of the psychological status of man's and women's cadets-rescuerss in the conditions of daily learning activities are presented. To assess the psychological status, we used the coping-test Lazarus and the test of Eysenck.

Key words: psychological status of the cadets, the coping-test Lazarus, the test of Eysenck.

Негативная, а в некоторых случаях и экстремальная, обстановка профессиональной деятельности оказывает неблагоприятное влияние на психологическое и физиологическое состояние организма спасателей.

В наибольшей степени подверженными к действию стрессоров и страдающими от заболеваний, вызванных стрессом, считаются молодые люди, только что вошедшие в ряды обучающихся, поскольку процесс развития специальных навыков в соответствующей деятельности находится на начальных этапах совершенствования [3].

Для определения психологического статуса используют тест Айзенка, а для оценки копинг-механизмов, способов преодоления трудностей в различных сферах психической деятельности, копинг-стратегий у пожарных и спасателей применяют методику Лазаруса [4].

Приспособительные реакции организма пожарных зависят от личностных возможностей и функционального состояния их организма, которые необходимо учитывать при подготовке и профессиональном отборе будущих сотрудников МЧС России [1, 6].

Целью данной работы было исследование особенностей психологического статуса у курсантов-спасателей мужского и женского пола в условиях повседневной учебной деятельности.

Материал и методы исследования

Исследование проведено на базе ФГБОУ ВО «Ивановская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России» в научно-исследовательской лаборатории «Медицина катастроф».

В исследовании принимали участие 48 курсантов, средний возраст — 19 лет. Из обследованных 27 курсантов мужского пола и 21 курсант женского пола. Обследование курсантов проводилось в условиях повседневной учебной деятельности, оценивали психологический статус.

Для оценки психологического статуса использовали методику Лазаруса и тест Айзенка, выполняли сравнительный анализ показателей тестов у курсантов мужского и женского пола.

Достоверность различий оценивали по t-критерию Стьюдента.

Результаты исследования и их обсуждение

Исследование психологического статуса курсантов показывает (рис. 1), что большинство курсантов (60 %) справляются с трудностями с помощью планирования решения проблемы, 18 % — за счет ответственного подхода к делу, 10 % обладают повышенным самоконтролем. На поиск социальной поддержки (взаимодействие с другими людьми) ориентированы 10 %, 2 % — используют положительную переоценку (способность воспринимать трудность как очередной этап саморазвития). Курсанты не пользуются такими копинг-стратегиями как «конфронтация», «дистанцирование» и «избегание».

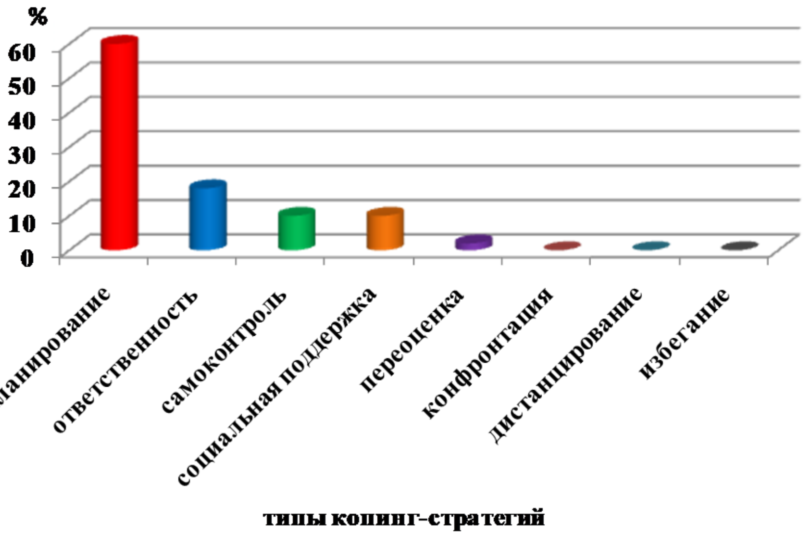


Рис. 1. Процентное соотношение количества курсантов, относящихся к разным типам копинг-стратегий

Сравнительный анализ копинг-стратегий у курсантов мужского и женского пола позволил выявить (рис. 2), что у курсантов женского пола такие копинг-стратегии как «переоценка», «конфронтация», «дистанцирование» и «избегание» отсутствуют. Количество курсантов женского пола, использующих такие копинг-стратегии как «планирование решения проблемы» и «самоконтроль», достоверно меньше, чем курсантов мужского пола. При этом, количество курсантов женского пола, которые используют копинг-стратегии «поиск социальной поддержки» и «принятие ответственности», достоверно больше, чем курсантов мужского пола.

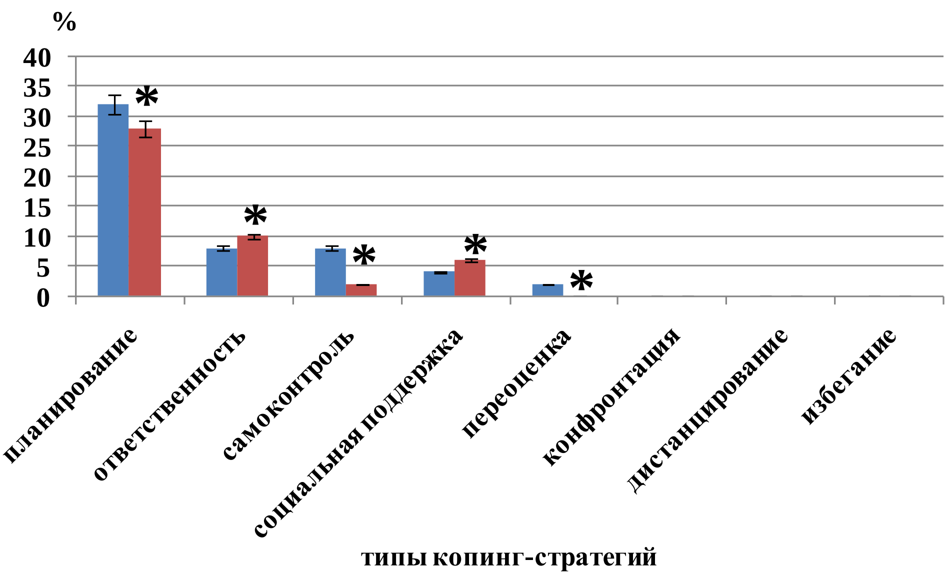


Рис. 2. Процентное соотношение количества курсантов мужского и женского пола, относящихся к разным типам копинг-стратегий

– курсанты мужского пола

– курсанты женского пола

Достоверность различий:

* – между показателями у курсантов мужского и женского пола ($p<0,05$).

Очевидно, полученные результаты свидетельствуют о том, что изменяющиеся когнитивные и поведенческие усилия испытуемых с целью управления специфическими внешними и внутренними требованиями, которые оцениваются ими как подвергающие их испытанию или превышающие их ресурсы, направлены на осознанные стратегии действий — на активное изменение, преобразование ситуации, поддающейся контролю, или на приспособление к ней, если ситуация не поддается контролю.

В результате исследования психологического статуса курсантов с помощью опросника Айзенка установлено (рис. 3), что большинство курсантов относятся к умеренным экстравертам (56 %), меньшее количество — значительным экстравертам (32 %) и лишь 12 % — умеренным интровертам. Среди курсантов не выявлено значительных интровертов.

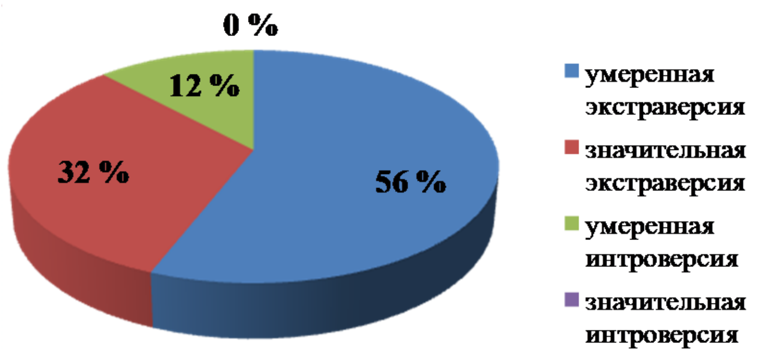


Рис. 3. Процентное соотношение количества курсантов с разной степенью экстраверсии и интроверсии

Сравнительный анализ количества курсантов мужского и женского пола с разной степенью экстраверсии и интроверсии позволил выявить (рис. 4), что количество курсантов мужского пола с умеренной и значительной степенью экстраверсии достоверно больше, чем курсантов женского пола. Количество курсантов мужского и женского пола с умеренной степенью интроверсии одинаковое.

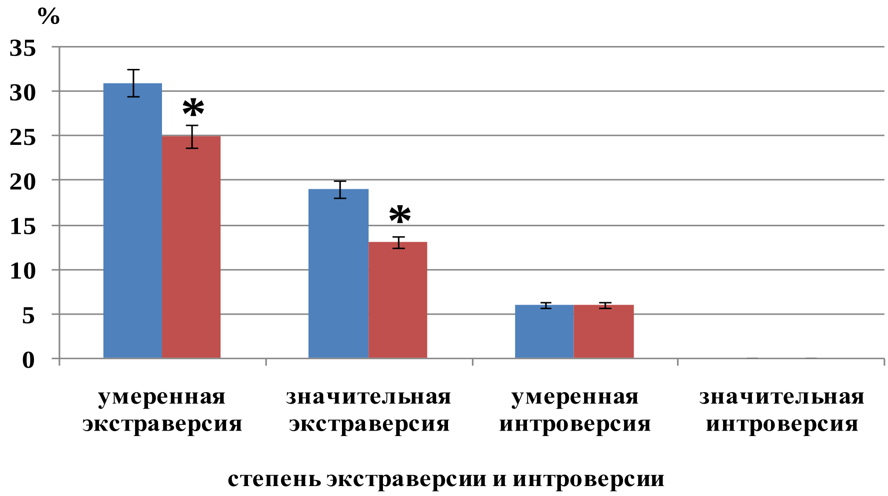


Рис. 4. Процентное соотношение количества курсантов мужского и женского пола с разной степенью экстраверсии и интроверсии
– курсанты мужского пола
– курсанты женского пола
Достоверность различий:
* – между показателями у курсантов мужского и женского пола ($p<0,05$).

При анализе шкалы «нейротизм» было выявлено (рис. 5), что большинство курсантов (86 %) обладают высокой эмоциональной устойчивостью, 10% — средней эмоциональной устойчивостью и только 4 % — высокой эмоциональной неустойчивостью. Среди курсантов отсутствуют лица с очень высокой эмоциональной неустойчивостью.

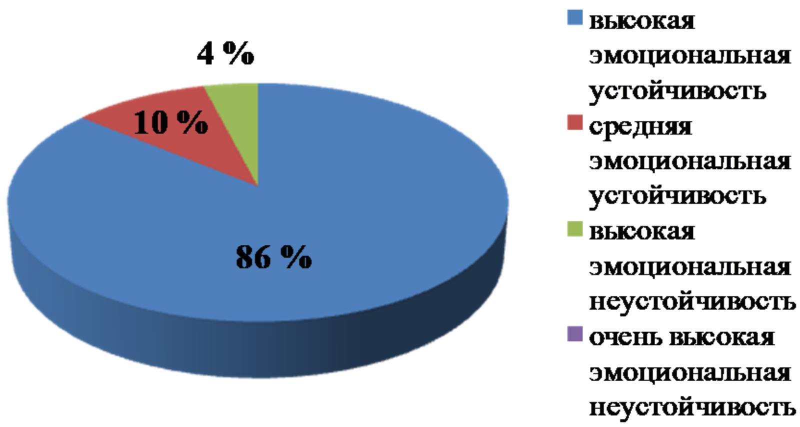


Рис. 5. Процентное соотношение количества курсантов с разной степенью эмоциональной устойчивости и неустойчивости

Сравнительный анализ количества курсантов мужского и женского пола с разной степенью эмоциональной устойчивости и неустойчивости позволил выявить (рис. 6), что количество курсантов мужского пола с высокой эмоциональной устойчивостью достоверно больше, чем курсантов женского пола. Количество курсантов мужского и женского пола со средней эмоциональной устойчивостью одинаковое. Однако, среди курсантов мужского пола 4 % составили лица с высокой эмоциональной неустойчивостью, что в целом не характерно для курсантов данного учебного учреждения.

Известно, что эмоциональная устойчивость — это свойство личности, которое обеспечивает высокоэффективную деятельность и целенаправленное поведение человека не только в условиях стресса, но и при реализации различных видов деятельности, в том числе учебной [2]. Она обеспечивает формирование профессиональных компетенций, связанных с навыками анализа своей деятельности и умением применять методы эмоциональной и когнитивной регуляции для оптимизации собственной деятельности и психического состояния; способностью контролировать стабильность своего эмоционального состояния [5].

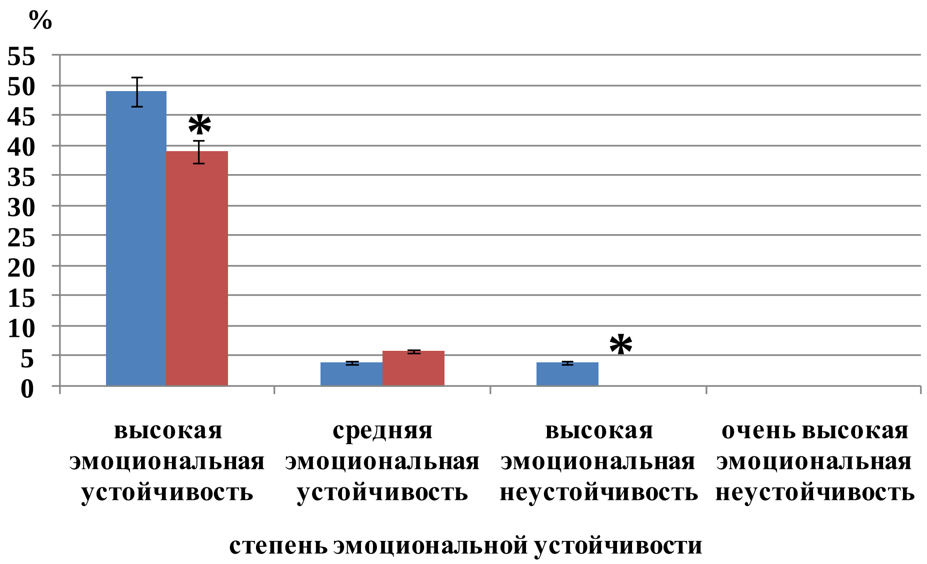


Рис. 6. Процентное соотношение количества курсантов мужского и женского пола с разной степенью эмоциональной устойчивости и неустойчивости

– курсанты мужского пола

– курсанты женского пола

Достоверность различий:

* – между показателями у курсантов мужского и женского пола ($p<0,05$).

По результатам теста Айзенка можно заключить, что курсанты обладают умением применять методы эмоциональной и когнитивной регуляции для оптимизации собственной деятельности и психического состояния, а также способностью контролировать стабильность своего эмоционального состояния.

Выводы

1. Большинство курсантов по психологическому статусу относятся к умеренным экстравертам (56 %), обладают высокой эмоциональной устойчивостью (86 %) и умением справляться с трудностями с помощью планирования решения проблемы (60 %).

2. Количество курсантов мужского пола с умеренной степенью экстраверсии, с высокой эмоциональной устойчивостью и умением справляться с трудностями с помощью планирования решения проблемы значительно больше, чем курсантов женского пола.

Библиографический список

1. *Вишневская М. В.* Диагностика нарушений адаптации у спасателей и их коррекция на санаторном этапе реабилитации: автореф. дис. … канд. мед. наук. М., 2009. 30 с.
2. *Емельяненко А. А.* Эмоциональная устойчивость как фактор успешности учебной деятельности курсантов военных вузов: гендерный аспект // Вестник ТГУ. Воронеж, 2012. С. 122—131.
3. *Королева С. В.* Инновационные технологии объективной оценки профессиональной адаптации // Инновационные технологии психологического сопровождения профессиональной деятельности специалистов экстремального профиля и психологического обеспечения чрезвычайных ситуаций: материалы научно-практической конференции. М., 2011. С. 62—67.
4. *Крюкова Т. Л., Куфтяк Е. В.* Опросник способов совладания (адаптация методики WCQ) // Журнал практического психолога. 2007. № 3 С. 93—112.
5. *Медведева В. Е.* Педагогические условия формирования эмоциональной устойчивости у студентов-психологов в вузе: автореф. дис. … канд. пед. наук. Орел, 2011. 27 с.
6. *Самонов А. П.* Психология профессионального мастерства пожарных. М.: Электронные издательские системы, 2000. 113 с.

УДК 502.75 (470.316)

Е. А. Борисова, Н. К. Казанова

ФЛОРА ПАМЯТНИКА ПРИРОДЫ «ПАРК В ПОЙМЕ Р. КОТОРОСЛЬ» ЯРОСЛАВСКОЙ ОБЛАСТИ

В статье приводятся данные о флоре памятника природы регионального значения Ярославской области — «Парк в пойме р. Которосль». В результате проведенных исследований в составе современной флоры ООПТ было отмечено 187 видов сосудистых растений, относящихся к 2 отделам, 3 классам и 53 семействам. 63 вида (33,7 %) являются чужеродным, среди них 29 видов — инвазионные. Кратко охарактеризовано распределение инвазионных видов в соответствии с инвазионном статусом. Среди редких растений местной флоры найдено 2 вида (*Epipactis helleborine, Ulmus glabra*), которые включены в Красную книгу Ярославской области.

Ключевые слова: особо охраняемые природные территории (ООПТ), чужеродные, инвазионные виды, редкие виды местной флоры, Ярославская область.

E. A. Borisova, N. A. Kazanova

FLORA OF THE NATURE MONUMENT «PARK IN THE FLOOR OF THE KOTOROSL RIVER» (YAROSLAVL REGION)

Data on the flora of the natural monument of the Yaroslavl region «Park in the floodplain of the Kotorosl River» are provided. As a result 187 vascular plant species from 2 departments, 3 classes, 53 families have been registered in the flora of the natural monument to 2020. 63 species (33.7 %) are alien, the invasive group consists of 29 species. According to the invasive status distribution of invasive species are briefly characterized. 2 rare species of native flora (*Epipactis helleborine, Ulmus glabra)* are included in to the Yaroslavl region Red Data Book.

Key words: specially protected natural territories (SPNA), alien, invasive species, Yaroslavl region.

В условиях антропогенной трансформации природы необходимы постоянные усилия по сохранению биологического и ландшафтного разнообразия, поддержанию экологического равновесия и сохранения ценных природных объектов [1, 2]. Создание особо охраняемых природных территорий (ООПТ) служит эффективным способом решения данных проблем. Важным остается создание и функционирование ООПТ в городах. Городские ООПТ составляют важнейшую часть «экологического каркаса», обеспечивают комфортные условия для жизни, а также позволяют сохранить природные экосистемы, местообитания редких видов [1, 3, 5]. Учитывая уязвимость природных компонентов в условиях города, необходимо своевременное выявление негативных факторов воздействия [2], одним из которых является распространения адвентивных видов. Выявление состава и особенностей распространения заносных растений на ООПТ различных категорий очень важно и проводятся во многих регионах нашей страны [2—4, 9, 10].

В г. Ярославль имеется несколько ООПТ, среди которых особое место занимает памятник природы — «Парк в пойме р. Которосль», созданный в 1993 г. (Решение Ярославского областного Совета народных депутатов от 27.05.1993 г. № 118). Он расположен в центральной части города по обоим берегам р. Которосль. Его площадь большая, составляет 76,8 га. Парк включает разнообразные экосистемы: открытые песчаные пляжи (городской пляж), парк с аттракционами, лодочные базы (остров Даманский), участки древесной растительности, прибрежные травянистые ценозы на склонах берегов, пустыри. Между лодочной станцией и асфальтированной площадкой для технических видов спорта расположены посадки сосны обыкновенной. Через парк проходит центральная аллея, по территории парка проложены асфальтированные дорожки, развита тропиночная сеть, в центральной части разбиты цветочные клумбы. На юге острова Даманский присутствуют насаждения берёзы с липой, кленом и группами караганы древовидной.

Территория ООПТ имеет большое рекреационное значение, она часто посещается жителями Ярославля и приезжающими туристами.

В августе 2020 г. были проведены флористические исследования различных участков ООПТ «Парк в пойме р. Которосль». Были описаны растительные сообщества, составлены флористические списки, выявлен полный состав сосудистых видов растений. Особое внимание уделялось чужеродным и редким видам местной флоры.

Для оценки активности инвазионных видов ООПТ была использована методика с выделением 4-х статусов: статус 1 — виды трансформеры, статус 2 — виды, активно расселяющиеся и натурализующиеся в нарушенных, полуестественных и естественных местообитаниях; статус 3 — виды, расселяющиеся и натурализующиеся в нарушенных местообитаниях; статус 4 — потенциально инвазионные виды [7].

Редкие и наиболее интересные виды заносных растений гербаризировались. Гербарные образцы хранятся в гербарии Ярославского государственного университета (YAR), имеющиеся дублеты будут переданы в гербарий им. Д. П. Сырейщикова (MW).

В результате проведенных исследований, обобщения имеющихся данных к 2020 г. во флоре ООПТ «Парк в пойме р. Которосль» было выявлено 187 видов сосудистых растений, относящихся к 2 отделам, 3 классам и 53 семействам.

Чужеродные виды во флоре ООПТ, как и следовало ожидать, представлены богато, всего насчитывается 63 вида, что составляет 33,7 % от их общего числа. Среди адвентивных видов почти половина (29 видов; 46 %) относятся к успешно натурализовавшимся. Они формируют группировки в различных экотопах парка, проникая и в природные сообщества ООПТ.

Отметим, что в пойме р. Которосль в состав древесных насаждений активно внедряются *Acer negundo, Fraxinus pennsylvanica,* встречаются крупные одиночные деревьев и группы разновозрастных сеянцев. *Aromia mitschurinii, Cerasus vulgaris, Malus baccata, M. domestica, Ribes rubrum,* встречающиеся одиночными экземплярами в зарослях кустарников, реже в небольших участках черноольшаников с черемухой. В составе древесных насаждений также найдены молодые сеянцы родов Crataegus, Populus, определение которых без генеративных органов не возможно.

По берегам р. Которосль, у кромки воды обычно встречаются группы таких заносных видов, как *Bidens frondosa, Epilobium adenocaulon,* *E. pseudorubescens*, *Juncus tenuis*, реже — *Oenothera rubricaulis, Solidago gigantea, Symphytum caucasicum.* По правому берегу р. Которосль крупные заросли формирует *Zizania latifolia*, конкурируя с *Alisma plantago-aquatica, Glyceria maxima.* В состав травянистых сообществ по берегу часто внедряются *Acer negundo, Helianthus tuberosus,* реже — *Fraxinus pennsylvanica, Parthenocissus inserta, Symphyotrichum* × *salignum.* В сырых местах, вдоль канав, на тенистых склонах отмечены *Bunias orientalis*, крупные заросли *Impatiens glandulifera, I. parviflora, Reynoutria* × *bohemica.* По нарушенным местам, вдоль дорог обычно встречаются *Amaranthus retroflexus, Lactuca serriola, Lepidotheca suaveolens, Matricaria perforata, Melilotus albus, Pastinaca sativa, Sonchus arvensis* и др. Практически все указанные виды относятся к инвазионным растениям Верхневолжского региона [8]. Распределение инвазионных видов в соответствии с их инвазионным статусом приводится в таблице.

Распределение инвазионных видов растений
в соответствии с их инвазионном статусом

Инвазионный статус	Число видов	Примеры видов
1	7	*Acer negundo, Bidens frondosa, Fraxinus pennsylvanica, Impatiens glandulifera, I. parviflora, Solidago gigantea, Zizania latifolia*
2	11	*Cerasus vulgaris, Aromia mitschurinii, Epilobium adenocaulon, E. pseudorubescens, Heracleum sosnowskyi, Juncus tenuis, Malus domestica, Oenothera rubricaulis, Reynoutria × bohemica, Solidago gigantea, Symphytum caucasicum*
3	6	*Armoracia rusticana, Cerasus vulgaris, Helianthus tuberosus, Lactuca serriola, Parthenocissus inserta, Symphyotrichum × salignum*
4	5	*Caragana arborescens, Lavathera thuringiaca, Malus baccata, Parthenocissus quinquefolia, Ribes rubrum*

Наличие в парке нарушенных местообитаний, где напочвенный покров вытоптан, местами полностью разрушен, приводит к распространению группировок сорных видов (*Artiplex patula, Berteroa incana, Chenopodium album, Echinochloa crusgalli, Erodium cicutarium, Solanum nigrum, Thlaspi arvense* и др.). На склонах берегов и фрагментах рва Спасского монастыря, отмечены группы *Bunias orientalis, Eigeron canadensis, Galinsoga parviflora, Impatiens parviflora, Rumex confertus*, которые растут вместе с устойчивыми к длительному рекреационному воздействию сорно-рудеральными видами местной флоры (*Achillea millefolium, Anthriscus sylvestris, Elytrigia repens, Equisetum arvense, Glechoma hederacea, Geum urbanum, Lapsana communis, Pimpinella saxifraga, Plantago major, Poa annua, Potentilla argentea, Tanacetum vulgare, Taraxacum officinale* и др.).

В разреженных посадках сосны обнаружен самосев *Caragana arborescens, Malus domestica,* группы *Eigeron canadensis*

Среди редких адвентивных видов, найденных в парке, отметим *Bryonia alba,* который встречается одиночно на острове Даманский, *Geranium pusillum*, которая растет плотными группами на сорном участке поймы правого берега р. Которосль, одиночные экземпляры *Euphorbia helioscopia* на обочине дороги вдоль левого берега р. Которосль, *Parthenocissus quinquefolia,* обвивающий стволы отдельных сосен.

Несмотря на нарушенность природных сообществ данной ООПТ, здесь сохранились популяции некоторых редких для региона видов растений, например, *Carex riparia, Butomus umbellatus, Campanula trachelium, Convallaria majalis, Iris pseudacorus, Nymphaea candida, Potentilla reptans, Typha angustifolia, Valeriana officinalis.* Отмечены стабильные популяции 2 редких видов — *Epipactis helleborine, Ulmus glabra,* которые включены в Красную книгу Ярославской области [6].

На территории парка присутствуют посадки некоторых декоративных древесных растений, например, *Robinia pseudoacacia, Syringa josikaea, Ulmus pumila,* которые ежегодно обильно цветут, и в дальнейшем могут давать самосев и распространяться по территории парка.

Проникновение заносных растений в природные сообщества создаёт угрозу для видов местной флоры и, прежде всего, для редких видов растений. Наличие открытых нарушенных местообитаний в парке благоприятны натурализации и дальнейшего распространения заносных видов. Особую тревогу вызывают проникновение на территорию ООПТ *Heracleum sosnowskyi,* а также плотные заросли *Acer negundo* в пойме р. Которосль. Это свидетельствует о необходимости соблюдения режима охраны и контроля рекреационных нагрузок.

Необходимо продолжить исследования флоры и растительности данного памятника природы, мониторинг состояния популяций редких видов растений и распространения инвазионных видов на его территории. Нужно дать оценку деградации растительности и почвенного покрова ООПТ для прогнозирования инвазионных процессов и их контроля. Работы по благоустройству парка нужно согласовывать с учеными ботаниками и экологами.

Библиографический список

1. *Борисова Е. А., Шилов М. П.* Дендрологический сад школы № 56 г. Иваново // Самарская Лука: проблемы региональной и глобальной экологии. 2017. Т. 26, № 4. С. 267—271.
2. *Борисова Е. А., Курганов А. А.* Адвентивная фракция флоры регионального заказника Затеихинский // Вестник Ивановского государственного университет. Серия: Естественные, общественные науки. 2019. Вып. 1/2. С. 9—14.
3. *Бузмаков С. А и др.* Особо охраняемые природные территории г. Перми: монография / под ред. С. А. Бузмакова и Г. А. Воронова. Пермь: Пермский гос. ун-т, 2012. 202 с.
4. *Гафурова М. М.* Об адвентизации флор государственного заповедника «Присурский» и национального парка «Чаваш Вармане» // Самарская Лука: проблемы региональной и глобальной экологии. 2020. Т. 29, № 4. С. 51—55.

5. *Исаченко Г. А., Исаченко Т. Е.* Роль особо охраняемых природных территорий в формировании культурных ландшафтов Санкт-Петербурга // Наследие и современность. 2020. № 3 (4). С. 55—72.
6. Красная книга Ярославской области. Ярославль: Академия 76, 2015. 472 с.
7. *Нотов А. А., Виноградова Ю. К., Майоров С. Р.* Методические аспекты создания региональных «черных списков» // Изучение и охрана флоры Средней России: материалы VII науч. совещ. по флоре Средней России / под ред. В. С. Новикова и др. М.: Ботан. сад МГУ, 2011. С. 103—108.
8. *Тремасова Н. А., Борисова Е. А., Борисова М. А.* Сравнительный анализ инвазионного компонента во флоре 5-ти областей Верхневолжского региона // Ярославский педагогический вестник. 2013. Т. 3, № 4. С. 171—177.
9. *Шатрова А. И., Андреев Д. Н.* Мониторинг особо охраняемых природных территорий в городах РФ // Вопросы степеведения. 2019. № XV. С. 356—359.
10. *Starodubtseva E. A. et al.* Alien species in local floras of the Voronezh region nature reserve fund (Russia)) // Nature Conservation Research. 2017. 2 (4). P. 53—77.

УДК 541.62/.636:547.867.6+54.057

Н. А. Магдалинова, Л. В. Иванова, М. В. Клюев

КВАНТОВО-ХИМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАКЦИИ СИНТЕЗА ГЕКСАГИДРОФЕНОКСАЗИНОВ В ЭТАНОЛЕ

Представлены результаты квантово-химического моделирования реакции синтеза гексагидрофеноксазинов путем восстановительной циклизации нитрофеноксициклогексанонов. Обсуждаются геометрические, электронные и энергетические характеристики молекул с учетом влияния растворителя, а также энергетические параметры стадий реакции.

Ключевые слова: квантово-химическое моделирование, восстановительная циклизация, гексагидрофеноксазины, растворитель.

N. A. Magdalinova, L. V. Ivanova, M. V. Klyuev

QUANTUM-CHEMICAL MODELING OF THE SYNTHESIS REACTION OF HEXAHYDROPHENOXASINES IN ETHANOL

The article presents the results of quantum-chemical modeling of the reaction of the synthesis of hexahydrophenoxazines by the reductive cyclization of nitrophenoxycyclohexanones. The geometric, electronic, and energy characteristics of molecules with allowance for the effect of the solvent are discussed, as well as the energy parameters of the reaction stages.

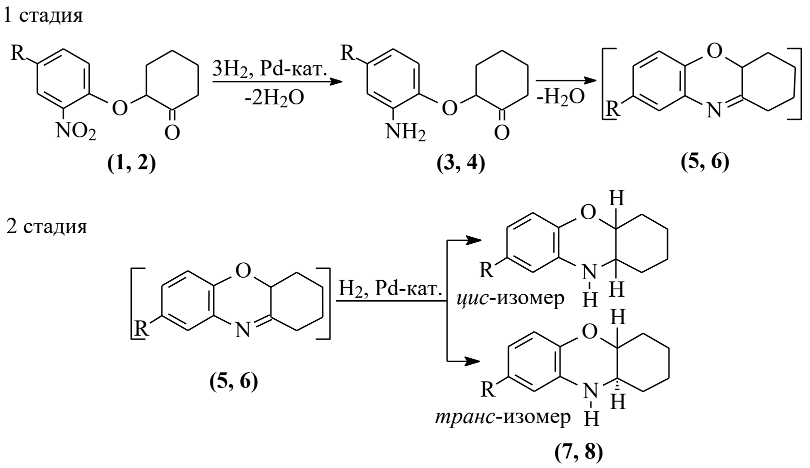
Key words: quantum chemical modeling, reductive cyclization, hexahydrophenoxazines, effect of the solvent.

Ранее в статье [8] нами проведено квантово-химическое моделирование гексагидрофеноксазинов и реакции их синтеза путем восстановительной циклизации нитрофеноксикетонов [1—3, 5] без учета растворителя, которое показало, что в смеси гексагидрофеноксазинов преобладает *транс*-изомер. Этот факт подтвержден экспериментально [10]. Присоединение водорода к связи — N=C< происходит ступенчато, а введение метильного заместителя в ароматическое кольцо не оказывает существенного влияния на структуру молекул, их энергетические и электронные характеристики.

Целью данной работы является квантово-химическое моделирование реакции восстановительной циклизации нитрофеноксициклогексанонов (**1** и **2**), протекающей через образование аминофеноксициклогексанонов (**3** и **4**) и промежуточного продукта — азометина (**5** и **6**) с конечными продуктами *цис*- и *транс*-изомеров 2,3,4,4а,10,10а-гексагидро-1*H*-феноксазина (**7**) и 8-метил-2,3,4,4а,10,10а-гексагидро-1*H*-феноксазина (**8**) (схема) [9] с учетом влияния растворителя — этанола.

Геометрические, электронные и энергетические характеристики молекул **1**–**8** исследуемой реакции (схема) в среде этанола получены в континуальном приближении (PCM) с применением квантово-химического метода DFT/B3LYP/cc-pVTZ в программе PC GAMESS 7.1(Firefly) [4] и теории NBO (расчетный пакет NWChem) [7].

Схема



R: H (1, 3, 5, 7), CH3 (2, 4, 6, 8)

В табл. 1 представлены результаты квантово-химического моделирования молекул **1**–**6** без учета влияния растворителя и в растворителе. Видно, что помещение исследуемых соединений в среду этанола приводит к дополнительной поляризации молекул: увеличивается дипольный момент и отрицательный суммарный заряд на соответствующих функциональных группах. Значения энергий ВЗМО и НСМО изменяются по-разному. Так для нитрофеноксициклогексанонов $E_{ВЗМО}$ практически не меняется, а $E_{НСМО}$ понижается на 0.2–0.3 эВ. В молекулах азометинов 5 и 6 значения $E_{ВЗМО}$ и $E_{НСМО}$ понижаются (табл. 1). Форма шестичленного цикла сохраняется: в молекулах **1**–**4** – кресло, в **5** и **6** – твист (рис. 1). Метильная группа в ароматическом кольце не влияет на энергетические, электронные и геометрические характеристики (табл. 1).

Таблица 1

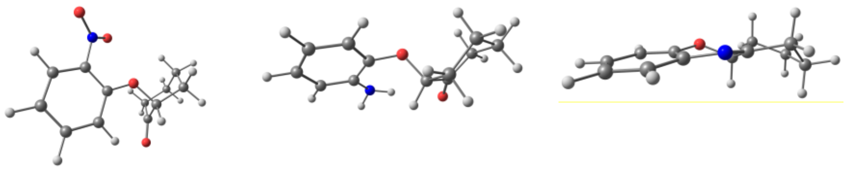
Характеристики исходных соединений, их продуктов гидрирования и конденсации*

Характеристики	Молекулы					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$E_{ВЗМО}$, эВ	-6.78	-6.60	-5.57	-5.50	-6.02	-5.86
	-6.75	***-6.58***	***-5.78***	***-5.72***	***-6.20***	***-6.04***
$E_{НСМО}$, эВ	-2.39	-2.33	-1.16	-1.12	-1.22	-1.18
	-2.62	***-2.60***	***-1.24***	***-1.21***	***-1.36***	***-1.33***
Дип. момент, D	2.28	2.31	2.24	2.16	2.31	1.98
	3.20	***7.32***	***3.12***	***3.04***	***3.19***	***2.71***
Суммарный заряд**	-0.221	-0.223	-0.014	-0.016	-0.121	-0.121
	-0.261	***-0.269***	***-0.016***	***-0.019***	***-0.135***	***-0.135***
Форма цикла	кресло	кресло	кресло	кресло	твист	твист

Примечание. *Полужирным курсивом указаны значения характеристик молекул с учетом растворителя.

Приведены суммарные заряды на NO_2-группе для **1 и **2**, на NH_2-группе для **3** и **4**, на связи –N=C< для **5** и **6**.

В растворителе в равновесиях *цис-транс*-изомерии разности энергий изомеров $\Delta E = E_{цис-}–E_{транс-}$ увеличились и составили 1.3 ккал/моль для незамещенного и замещенного гексагидрофеноксазина (табл. 2), что выше по сравнению с результатами без учета влияния растворителя в 2 раза. Растворитель усиливает преобладание *транс*-изомеров для обоих соединений. Значения энергий ВЗМО и НСМО для *транс*-изомеров ниже, чем для *цис*-изомеров молекул гексагидроксофеноксазинов (табл. 2). Сопоставляя полученные результаты с данными квантово-химических расчетов исследуемых молекул без учета влияния растворителя, следует отметить, что растворитель понижает энергии молекул, при этом разность между изомерами растет.



1 **3** **5**

Рис. 1. Строение молекул 2-(2-нитрофенокси)циклогексанона (**1**), 2-2-аминофеноксициклогексанона (**3**) и азометина (**5**)

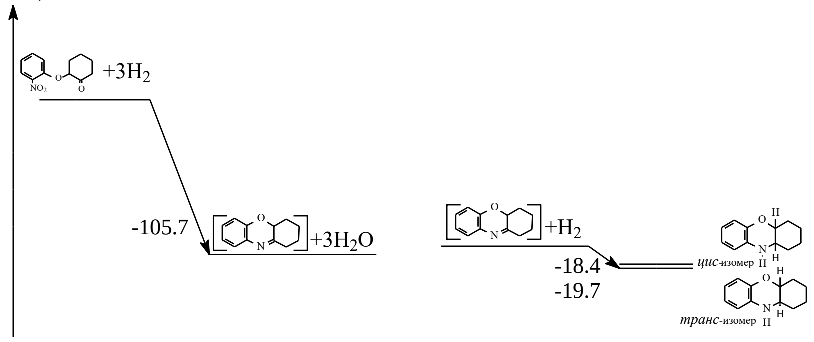
Таблица 2

Энергетические параметры *цис-* и *транс*-изомеров 2,3,4,4а,10,10а-гексагидро-1*H*-феноксазинов[*]

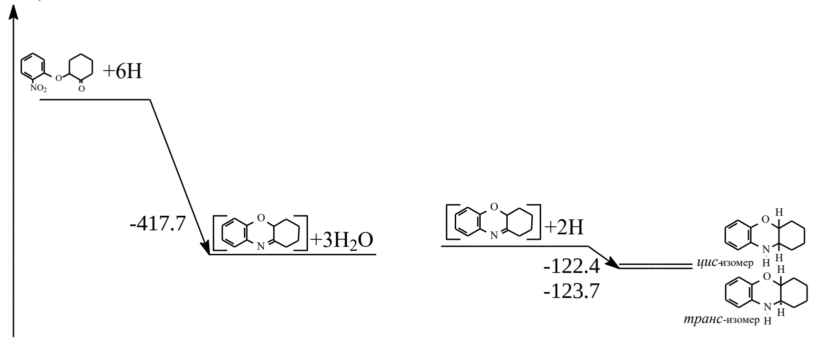
Соединение	Характеристики	*транс*-изомер		*цис*-изомер	
7	$E_{ВЗМО}$, эВ	-5.33	***-5.46***	-5.25	***-5.38***
	$E_{НСМО}$, эВ	0.01	***-0.21***	0.04	***-0.18***
	$\Delta E_{отн.}$, ккал/моль	0	***0***	0.6	***1.3***
	$\Delta G_{отн.}$, ккал/моль	0	***0***	1.0	***1.4***
	Дип. момент, D	3.1	***3.9***	2.8	***3.8***
8	$E_{ВЗМО}$, эВ	-5.21	***-5.39***	-5.15	***-5.29***
	$E_{НСМО}$, эВ	0.05	***-0.21***	0.05	***-0.16***
	$\Delta E_{отн.}$, ккал/моль	0	***0***	0.7	***1.3***
	$\Delta G_{отн.}$, ккал/моль	0	***0***	1.2	***0.3***
	Дип. момент, D	2.9	***3.7***	2.6	***3.6***

Примечание. [*]Полужирным курсивом указаны значения характеристик молекул с учетом растворителя.

Получены энергетические профили реакции с учетом влияния растворителя в двух подходах: 1) с молекулярным водородом и 2) с атомарным водородом (рис. 2).



а



б

Рис. 2. Энергетический профиль реакции восстановительной циклизации 2-нитрофеноксициклогексанона в этаноле а) с молекулярным водородом и б) с атомарным водородом

В работе [8] было показано, что протекание реакции более выгодно с атомарным водородом, чем с молекулярным. Учет растворителя увеличивает значения ΔE для первой и второй стадий реакции на 9.2 ккал/моль и на 0.4–1.2 ккал/моль соответственно по сравнению с моделированием без учета влияния растворителя [8]. Наблюдается более низкое значение ΔE второй стадии реакции для *транс*-изомера, чем для *цис*-изомера, что также подтверждает преобладание первого согласно литературным [6] и экспериментальным данным [10].

Таким образом, квантово-химическое моделирование реакции восстановительной циклизации нитрофеноксициклогексанонов с учетом влияния растворителя в континуальной модели (PCM) также подтвердило преобладание *транс*-изомера в смеси гексагидрофеноксазинов. Растворитель способствует дополнительной поляризации молекул и приводит к увеличению энергий протекающих стадий реакции: восстановительной циклизации и *цис-транс*-изомерии.

Библиографический список

1. *Baraldi P. G., Saponaro G., Moorman A. R., Romagnoli R., Preti D., Baraldi S., Ruggiero E., Varani K., Targa M., Vincenzi F., Tabrizi M. A.* 7-Oxo-[1,4]oxazino[2,3,4-ij]quinoline-6-Carboxamides as Selective CB2 Cannabinoid Receptor Ligands: Structural Investigations around a Novel Class of Full Agonists // Journal of Medicinal Chemistry. 2012. Vol. 55. Iss. 14. P. 6608—6623.
2. *Bunce R. A., Herron D. M., Hale L. Y.* Dihydrobenzoxazines and tetrahydroquinoxalines by a tandem reduction-reductive amination reaction // Journal Heterocyclic Chem. 2003. Vol. 40. P. 1031—1039.
3. *Gao S., Qu H.-T., Ye F., Fu Y.* Synthesis and Crystal Structure of N-Dichloroacetyl-3,4-dihydro-3-methyl-6-chloro-2*H*-1,4-benzoxazine // Journal of Chemistry. 2015. P. 1—5.
4. *Granovsky A. A.* // PCGAMESS version 7.1(Firefly)/ http://classic.chem.msu.su/gran/gamess/index.html
5. *Ye F., Zhou X.-L., Qu H.-T., Yi K.-H., Fu Y.* Studies on the synthesis of 3-methyl-3,4-dihydro-2*H*-1,4-benzoxazine // Journal of Chemical Engineering of Chinese Universities. 2015. Vol. 29, iss. 6. P. 1525—1528.
6. *Liu T., Jia W., Xi Q., Chen Y., Wang X., Yin D.* Diversity-Oriented Synthesis of Heterocycles: Al(OTf)3-Promoted Cascade Cyclization and Ionic Hydrogenation // The Journal of Organic Chemistry. 2018. Vol. 83, iss. 3. P. 1387—1393.
7. NWChem/ http://www.nwchem-sw.org/index.php/Main_Page
8. *Магдалинова Н. А., Иванова Л. В., Клюев М. В.* Квантово-химическое моделирование реакции синтеза 2,3,4,4a,10,10a-гексагидро-1*H*-феноксазинов // Научно-исследовательская деятельность в классическом университете: традиции и инновации [Электронный ресурс]: материалы Международного научно-практического фестиваля, Иваново, 15—29 апреля 2020 г. Электрон. дан. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2020. – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см. Систем. требования: программа чтения файлов в формате PDF 1.5. С. 98—102.
9. *Шапенова Д. С., Беляцкий М. К.* Восстановительная циклизация 2-(2-нитрофенокси)карбонильных соединений // Вестник Тюменского государственного университета. 2011. № 5. С. 119—123.
10. *Шапенова Д. С., Магдалинова Н. А., Клюев М. В.* One-pot синтез 2,3,4,4a,10,10a-гексагидро-1*H*-феноксазинов // Журнал органической химии. 2019. Т. 55, № 9. С. 1388—1392.

УДК 378.14.015.62

В. И. Звонников, А. А. Малыгин, М. Б. Челышкова

О ДОКАЗАТЕЛЬНОМ ПОДХОДЕ И ЕГО ВИДАХ В ОБРАЗОВАНИИ

В статье приводится краткий обзор развития доказательного подхода в образовании. Рассматриваются основные положения доказательного подхода и его применение в оценочных процедурах результатов обучения.

Ключевые слова: аргументация, доказательный подход, образовательное оценивание, результаты обучения.

V. I. Zvonnikov, A. A. Malygin, M. B. Chelyshkova

TO THE EVIDENCE-BASED APPROACH AND ITS TYPES IN EDUCATION

The article provides a brief review of development of the evidence-based approach in education. The authors examine basic statements of the evidence-based approach and its application in assessment of learning outcomes.

Key words: argumentation, evidence-based approach, educational assessment, learning outcomes.

Введение

В данной статье приводится краткий обзор развития доказательного подхода в образовании. Цель обзора состоит в упорядочении попыток применения доказательного подхода в современных обучающих или оценочных технологиях, которые нередко носят скорее декларативный нежели прагматический характер. Для достижения краткости, акцент в обзоре сделан на применение доказательного подхода в оценивании результатов обучения студентов, проводимом на основе аппарата образовательных измерений.

Базовые идеи доказательного подхода возникли и утвердились в медицине в 90-х годах XX века. Со временем они расширили область своего применения и переместились в сферу социальных наук, а затем и в образование. Педагоги также обратились к поиску доказательств путем установления истинности суждений на основе мета-анализа, их сравнения и обобщения для подтверждения эффективности инновационных технологий обучения или выявлению влияния негативных факторов, снижающих качество результатов образования. Например, на основе доказательного подхода в США к началу XXI века более 20 федеральных ведомств разработали ряд программ и сформировали базы данных доказательств в социальной сфере. В Великобритании в этот же период Оксфордский университет создал комплекс Campbell Collaboration, включающий несколько десятков тысяч исследований в области образования, социального обеспечения и предупреждения преступности. Австралийский институт исследования семьи (AIFS) сформировал обширную базу данных исследований в области семейного благополучия и потенциальных проблем. В настоящий период во многих станах мира на основе доказательного подхода ведутся многочисленные исследования для оценки воздействия и эффективности социальных программ в дошкольном и школьном образовании, профилактике подростковой преступности, программах поддержки семьи и помощи семьям безработных, профилактике суицидов и т. д.

Основные положения доказательного подхода и его применение в отечественном образовании

Как и любая инновация, доказательный подход вызывает у педагогов многообразные трактовки, а иногда и прямое отрицание. Хотя от него есть несомненная польза. Любые научные публикации и результаты исследований представляют смещенное восприятие фактов. В противоположность этому систематизированные обзоры доказательного характера, проведенные с помощью мета-анализа, содержат обоснованную интегрированную информацию, обобщая результаты многочисленных исследований, подходов и программ. Мета-анализ основан на статистическом анализе и обобщении многочисленных рандомизированных исследований, благодаря этому он позволяет получить обоснованные выводы относительно поставленных проблем. В настоящее время возможности мета-анализа значительно расширяются благодаря созданию обширных баз данных (Big Data), позволяющих интегрировано анализировать значительные объемы информации [9, 10].

Наиболее известным достижением в сфере доказательного подхода в обучении считается книга «Видимое обучение» (Дж. Хэтти, 2003) [9]. В ней приводятся результаты мета-анализа более 800 исследований, подтверждающие эффективность ряда методов обучения и инноваций в них. Центр внимания автор сосредоточил на обратной связи, обеспечивающей педагога информацией об ошибках и проблемах обучающихся в освоении новых знаний. На основе такой обратной связи процесс освоения новых знаний обучающимися утрачивает свой латентный характер и обучение становится видимым.

Во втором десятилетии нашего века доказательный подход значительно расширил сферы своего применения, обретя, соответственно, новые трактовки. На фоне отдельных попыток применения доказательного подхода в обучении, наличествующих в ряде отечественных публикаций и выступлениях, появился ряд терминов: «доказательная педагогика», «доказательное образование», «доказательное обучение» «доказательная образовательная политика», обсуждение которых носит, скорее, полемический, нежели прагматический характер, не внося никакого позитивного вклада в совершенствование качества образования.

Проведенный сравнительный анализ этих понятий показал их противоречивость, размытость и значительное смещение относительно базовых ценностей доказательного подхода в медицине и в социологии. Мало кто из исследователей обращается к научно-обоснованным методам мета-анализа, принятым в доказательном подходе в целях системной интеграции результатов различных исследований для получения обобщающего вывода и создания доказательной базы. Чаще всего в упрощенной трактовке доказательный подход сводится к поиску отдельных подтверждений эффективности педагогических воздействий либо инноваций в методах обучения в режиме традиционного педагогического эксперимента. При этом не проводится оценка гетерогенности (статистической неоднородности) результатов других оригинальных исследований, отсутствуют критерии включения исследований в анализ, не осуществляется контроль качества источников систематических ошибок эксперимента и не обращается никакого внимания на поиск альтернативных репрезентативных результатов по подобной тематике. Вследствие этого теряется вся квинтэссенция доказательного подхода в образовании, направленного на получение обобщенной и достоверной оценки величины эффекта влияния тех или иных факторов на результаты образования.

В других немногочисленных отечественных публикациях (С. М. Авдеева, 2021; Н. Н. Антонова, 2018; Н. Ф. Ефремова, 2018; А. В. Коржуев, Т. Н. Малахова и М. Б. Челышкова, 2019; А. А. Сидорова, 2016; А. Тихомирова и В. Балакирев, 2017; И. Л. Угланова, И. В. Брун и Г. М. Васин, 2018) прослеживается стойкая тенденция к корректности и прагматичности использования доказательного подхода в образовании. В статьях этих авторов анализируются модели логических схем построения доказательств и причинно-следственных связей, обсуждается аппарат метаанализа, рассматриваются методы рандомизации данных и формирования репрезентативных выборок для проведения контролируемых экспериментов и различные варианты проведения исследований (лонгитюдные, проспективные, когортные и т. д.). С 2020 года на базе Высшей школы экономики началась реализация магистерской программы «Доказательное развитие образования», включающей четыре обязательных курса и нацеленной на целостное понимание экономических, социологических, педагогических и философских доказательных основ в образовании. Ведутся исследования по применению байесовских сетей с целью повышения правдоподобности выводов о сформированности компетенций при построении моделей обучающихся (М. В. Хлопотов, 2014) [8].

Перечисленные выше исследования непосредственно примыкают к зарубежным работам по развитию доказательного подхода в оценивании учебных достижений обучающихся (R. Mislevy, 1994; R. Mislevy, M. M. Riconscente, 2006; R. Mislevy et al, 2014, V. J. Shute, 2011; V. J. Shute and L. Wang, 2016). Работы упомянутых зарубежных авторов характеризуются высокой корректностью в плане применяемого математико-статистического аппарата, нацеленного на получение доказательств для подтверждения выводов относительно обоснованности оценок испытуемых. В частности, в статье R. Mislevy «Evidence and Inference in Educational Assessment» (1994) доказательство в оценивании трактуется, как процесс установления или обоснования истинности оценочных суждений, подчиненный определенной логической схеме, получившей название схемы Тулмина [13].

В соответствии с работами большинства отечественных и зарубежных исследователей, цель построения доказательств в оценочных процессах состоит в установлении соответствия определенных выводов относительно баллов испытуемых реальной действительности, то есть их истинным латентным баллам, являющимся идеализацией и свободным от ошибок измерения. В связи с появлением компетентностного подхода к трактовке качества результатов образования обострились проблемы обеспечения высокой надежности и валидности результатов измерений в силу металатентной природы компетенций. Поэтому целый ряд зарубежных тестологических служб и компаний обратился к методологии доказательного подхода при проведении сертификационных или иных массовых экзаменов («Cisco», «GlassLab», «CRESST» «Labs», «CITO» и т. д).

Ключевой идеей доказательного подхода в оценивании являются радикальные различия между данными и доказательствами [14]. Роль данных в оценочных процессах отводится наблюдаемым результатам испытуемых, полученным с помощью тестов или иного инструментария. Доказательства — это конкретные, эмпирические свидетельства, позволяющие сделать обоснованные выводы о результатах испытуемых и приблизиться к их истинным баллам. Данные превращаются в доказательства в тех случаях, когда установлена их подтверждающая роль по отношению к выдвинутым гипотезам. Само оценивание, согласно S. W. Messick, рассматривается как процесс рассуждений, который идет от анализа наблюдаемых проявлений реакции испытуемых на предложенные им задания к получению выводов об их знаниях или компетенциях [11].

Сам процесс рассуждений укладывается в классическую схему Тулмина, получившую развитие в различных сферах социальных наук [12]. Ее применение в оценочных процессах при планировании и объяснении логических связей между данными, доказательствами и выводам в образовании обеспечивает переход к доказательствам гипотез, выдвинутых относительно освоения испытуемыми тех знаний, умений или компетенций, которые они должны проявить при выполнении заданий оценочных средств. Помимо подтверждающих данных, как обязательный компонент, в схему включены альтернативные аргументы, опровергающие гипотезы и описывающие ситуации, которые потенциально ослабляют или даже нарушают связь между данными и предполагаемым выводом. Анализ альтернативных аргументов и поиск подтверждающих доказательств позволяет отвергнуть или принять гипотезы относительно освоения испытуемым проверяемых знаний, умений или компетенций.

В качестве примера гипотезы с позиций разработчика оценочных средств можно предположить тот факт, что данное задание содержит информацию, необходимую для проверки освоения определённой компетенции. Для проверки гипотезы можно использовать информацию о том, что аналитические и эмпирические исследования показали наличие сильной положительной связи между этим заданием и ему подобными с примерами из будущей профессиональной деятельности выпускника, требующими проявления данной компетенции. Рассматривая возможности доказательного подхода применительно к проблеме подтверждения того, что испытуемый действительно освоил компетенцию, необходимо выделить аргументы и контраргументы. Гарантиями освоения компетенции в форме доказательств являются данные о доводах и обоснованиях, которые приводит испытуемый для своего ответа, иллюстрируя ход мышления. Контраргументы включают предположение о случайном выполнении задания испытуемым, которое подтвердятся, если остальные подобные задания он выполнил неверно. В том случае, если контраргументы не имеют подтверждений можно принять гипотезу о владении испытуемым той компетенцией, освоение которой проверяется в задании.

Таким образом, доказательный подход в образовательном оценивании способствует переходу от предположений о том, овладел ли испытуемый планируемыми к усвоению знаниями, умениями или компетенциями к получению подтверждающих выводов об их освоении [4]. В основе предположений лежат наблюдаемые результаты оценивания, являющиеся априорными оценками вероятности правильного выполнения каждого задания испытуемыми, а доказательная база позволяет получить апостериорные оценки путем дедуктивных рассуждений на основе анализа обоснований ответов, приведенных испытуемым, или с помощью теоремы Байеса [7, 8]. Благодаря доказательному подходу в образовательном оценивании появляется возможность получить подтверждение того, что испытуемый справился с заданием не случайно, а вполне осознанно применил освоенные компетенции для решения практических или профессиональных задач. Методики разработки оценочных заданий в рамках доказательного подхода стали называть «центрированным на доказательствах дизайном» (Evidence-Centered Design — ECD), носящим универсальный характер, поскольку его можно использовать при создании тестов с выбором ответов или с конструируемыми ответами, в кейсах и т. д. [1, 7]. Эти методики легли в основу создания инновационного инструментария, привлекшего внимание многих крупнейших служб тестирования в конце второго десятилетия XXI века.

В целом, центрированный на доказательствах дизайн оценочных средств позволяет проникнуть в суть процессов, происходящих при выполнении заданий испытуемыми. С его помощью можно выявить аргументы испытуемого по выбору ответов, понять ошибочность его рассуждений или подтвердить их правильность, а также продвинуться в создании инструментария, способного оценивать мыслительные процессы, происходящие у испытуемых при выполнении заданий оценочного средства.

Важнейшим компонентом теоретического базиса доказательного подхода является концептуальная структура, связывающая модель подготовки испытуемого в виде совокупности компетенций или других переменных измерения с моделью оценочного средства, включающего набор упорядоченных заданий для оценивания отдельных переменных. Эта структура является удобным и эффективным средством анализа меры правдоподобности связей между результатами оценивания и выводами в форме утверждений относительно освоения испытуемыми переменных измерения с помощью байесовских сетей. Хотя в отечественной практике байесовские сети, равно как и другие достижения доказательного подхода используются крайне редко. В основном, дело ограничивается рассуждениями о возможностях доказательного подхода в образовании, развитием понятийного аппарата в условиях рассогласования подходов и точек зрения.

Применение доказательного подхода в оценочных процессах

Один из немногочисленных примеров применения доказательного подхода в массовых оценочных процедурах приведен в диссертации Малаховой Т. Н. «Проектирование инструментария для аккредитации выпускников медицинских вузов» [3]. Для выполнения своей диссертационной работы в 2020 году ею был проведен эксперимент, в котором студентам шести медицинских вузов (1620 испытуемых) было предложено обосновать свой выбор ответа в заданиях с множественным выбором. Для этого ею была разработана специальная инструкция, ориентирующая студентов на обязательное обоснование выбора каждого ответа. Эксперимент был проведен на платформе Репетиционного экзамена Методического центра аккредитации в процессе аудиторного экзамена в присутствии преподавателей вузов.

По замыслу эксперимента предполагалось, что испытуемые в процессе обоснования выбора ответа приведут определенные критерии, вынесут оценочные суждения, рассмотрят контраргументы, проведут сравнительный анализ возможных вариантов ответов и обоснуют тем самым сделанный выбор в соответствии со схемой Тулмина. Анализ результатов апробации выявил противоположную картину. Среди данных эксперимента оказалось подавляющее число ответов, носящих фрагментарный характер в виде простой ссылки на учебник или клинические рекомендации и не содержащих никакого развернутого обоснования. Оказалось, что у выпускников вузов в недостаточной степени сформирована способность обосновывать свои суждения, использовать различные способы доказательств своей правоты при выборе ответа, основываясь на сравнении, анализе и оценивании всей совокупности ответов к заданию.

Тем самым можно обозначить потенциальные позитивные возможности доказательного подхода. В том случае, если в вузах будут систематически требовать от студентов приводить обоснования и аргументы при выполнении оценочных заданий, у обучающихся будет постепенно формироваться способность к обоснованию своих суждений, понимание того, что доказательства не сводятся к простому перечислению информационных источников. Для получения доказательств необходимо проявить не только профессиональные знания, но и способность к критическому мышлению.

Основные выводы

Развитие доказательного подхода имеет несомненное позитивное влияние на совершенствование качества образования. С его помощью можно выявить наиболее эффективные методики обучения, усилить обратную связь со студентами в обучении, развить у студентов способность мыслить логически и навыки критического мышления. Особенно эффективен доказательный подход в оценочных процессах. С его помощью можно получить ответы на ряд вопросов:

— на основании каких аргументов и контраргументов испытуемый выбрал один из ответов, предложенных в заданиях с множественным выбором?

— как и каким путем в мышлении испытуемых происходит переход от знаний к умениям их применять для решения профессиональных проблем?

— в чем причины выбора неправильных ответов?

— как обобщить результаты выполнения отдельных заданий, чтобы получить более широкие представления о способностях выборки испытуемых на основе теории генерализации?

В целом, методология доказательного подхода ориентирована на создание нового поколения оценочных средств. Она может служить основой для научной организации процесса разработки инновационного инструментария, поскольку обеспечивает координацию работы различных специалистов по созданию инструментария, таких как статистики, авторы заданий, администраторы процессов предъявления измерителей и проектировщиков их интерфейса. Результаты анализа возможностей методологии доказательного подхода свидетельствуют о его перспективности.

Библиографический список

1. *Ефремова Н. Ф.* Аргументации и доказательства надежности оценок компетенций студентов // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. 2018. Т. 12, № 2. С. 43—50.
2. *Коржуев А. В., Антонова Н. Н.* Логико-гносеологический формат педагогического познания и доказательная педагогика // Высшее образование в России. 2018. Т. 27, № 10. С. 136—145.
3. *Малахова Т. Н.* Проектирование инструментария для аккредитации выпускников медицинских вузов: дис. … канд. пед. наук. М., 2021. 227 с.
4. Руководство по разработке и применению оценочных средств для аттестации и аккредитации: учебное пособие для авторов оценочных средств на примере группы медицинских специальностей / Т. В. Семенова, Ж. М. Сизова, В. И. Звонников, М. Б. Челышкова. СПб.: Санкт-Петербургский государственный педиатрический медицинский университет Министерства здравоохранения Российской Федерации, 2021. 400 с.
5. *Сидорова А. А.* Доказательная образовательная политика: методологические основы // Государственное управление. Электронный вестник. 2016. Вып. 57. С. 322—329. URL: http://e-journal.spa.msu.ru/uploads/vestnik/2016/vipusk57.avgust_2016_g./upravl enie_obrazovaniem/sidorova.pdf
6. *Тихомирова А., Балакирев В.* Доказательный подход к проектированию и оценке программ в сфере детства [Электронный ресурс]: Международная научно-практическая конференция «Доказательный подход к проектированию и оценке результатов программ в сфере детства». 20—22 сентября 2016 г. г. Москва. URL: http://ozenka.info/usefuldata/conf 2016/seminar_dokaz_podhod/340_ file_1.pdf
7. *Угланова И. Л., Брун И. В., Васин Г. М.* Методология Evidence-Centered Design для измерения комплексных психологических конструктов [Электронный ресурс] // Современная зарубежная психология. 2018. Т. 7, № 3. С. 18—27. URL: https://psyjournals.ru/jmfp/2018/n3/Uglanova_ Brun _Vasin.shtml
8. *Хлопотов М. В.* Применение байесовской сети при построении моделей для оценки уровня сформированности компетенций // Интернет-журнал «Науковедение». 2014. № 5 (24). С. 1—28. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-bayesovskoy-seti-pri-postroenii-modeley-dlya-otsenki-urovnya-sformirovannosti-kompetentsiy/viewer
9. *Хэтти Дж. А. С.* Видимое обучение. Синтез результатов более 50 000 исследований с охватом более 80 млн школьников / пер. Н. В. Селиванова; под ред. В. К. Загвоздкина, Е. А. Хамраевой. М.: Национальное образование, 2017. 495 с.
10. *Deane P.* Strategies for Evidence Identification Through Linguistic Assessment of Textual Responses // In D. M. Williamson, R. J. Mislevy, & I. I. Bejar (Eds.), Automated scoring of complex tasks in computer-based testing. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2006. P. 313—362.
11. *Messick S. W.* Standards of validity and the validity of standards in performance assessment // Educational Measurement: Issues and Practice. 1995. Vol. 14? no. 4. P. 5—8.
12. *Mislevy R. J., Almond R. G., Lukas J. F.* A brief introduction to evidence-centered design. (ETS Research Report RR-03-16). Princeton, NJ: Educational Testing Service, 2003. 37 p. Available at: https://www.ets.org/Media /Research/pdf/RR-03-16.pdf
13. *Mislevy R.* Evidence and Inference in Educational Assessment // Psychometrika. 1994. Vol. 59, no. 4. P. 439—483. Available at: https://doi. org/10.1007/BF02294388
14. *Schum D.* Evidence and Inference for the Intelligence Analyst, 2 vols. Lanham, Md., University of America Press, 1987. 374 p.
15. *Shute V. J. & Wang L.* Assessing and supporting hard-to-measure constructs / In A. A. Rupp, & J. P. Leighton (Eds.), The handbook of cognition and assessment: Frameworks, methodologies, and application. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2016. P. 535—562.

УДК 377.8

Т. А. Воронова

РАЗВИТИЕ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ ПЕДАГОГОВ ШКОЛ В УСЛОВИЯХ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Рассматриваются вопросы изучения эффективных условий для развития контрольно-оценочной компетентности учителей общеобразовательных организаций в системе повышения квалификации, охарактеризованы современные идеи, на которых проектируется контрольно-оценочная деятельность учителя, сформулированы требования Федерального государственного образовательного стандарта основного общего и среднего общего образования к системе контроля и оценки, показаны результаты эмпирического исследования понимания учителями этих требований и степень их реализации в практической деятельности, доказана продуктивность такой формы организации повышения квалификации, как муниципальный проект.

Ключевые слова: контроль, оценка, контрольно-оценочная компетентность педагога, деятельностный подход в контроле и оценке, повышение квалификации, Федеральный государственный образовательный стандарт общего образования, муниципальный проект.

T. A. Voronova

DEVELOPMENT OF CONTROL AND EVALUATION COMPETENCE OF SCHOOL TEACHERS IN THE CONTEXT OF PROFESSIONAL DEVELOPMENT

Discusses the study of effective conditions for the development of monitoring and evaluation of competence of teachers of educational institutions in the system of professional development is characterized by modern ideas, which are designed monitoring and evaluation activities of teachers, the requirements of the Federal state educational standard of basic General and secondary General education system of monitoring and evaluation, are shown the results of empirical research of understanding by teachers of these requirements and their degree of implementation in practice, The productivity of such a form of professional development organization as a municipal project is proved.

Key words: control, evaluation, control and evaluation competence of the teacher, activity approach in control and evaluation, professional development, Federal State Educational Standard of General Education, municipal project.

Проблематизация

Модернизация образования, программа которой предложена правительством РФ, направлена на введение Федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС) на всех уровнях общего образования: начального общего (ФГОС НОО), основного общего (ФГОС ООО), среднего общего (ФГОС СОО). Важнейшей составляющей основных образовательных программ является разработка системы контроля и оценки на базе требований

Федерального государственного образовательного стандарта общего образования (ФГОС ОО). Поэтому и возникает вопрос: «Как должна измениться система контроля и оценивания в школе, чтобы она соответствовала требованиям ФГОС начального общего, основного общего и среднего общего образования?». Но не менее важным является и вопрос: «Что нужно сделать, чтобы система оценки и контроля удовлетворяла учащихся и их родителей, была прозрачна, объективна и надежна, стимулировала учащихся на преодоление трудностей в обучении и способствовала формированию их мотивации учения?». В то же время контрольно-оценочная деятельность является важнейшим компонентом педагогической деятельности учителя, поэтому продуктивное ее осуществление — это необходимое и достаточное условие повышения результативности работы педагогов. Компетентность учителя в контрольно-оценочной деятельности — залог успеха как учителя, так и ученика. Однако наши исследования показывают, что наиболее слабое звено работы учителей, вызывающее недовольство учащихся и их родителей, да и администрации образовательных организаций, — это как раз контроль и оценка [4, 5]. Данное противоречие обосновывает необходимость обращения к вопросам контрольно-оценочного аспекта педагогической деятельности в системе повышения квалификации педагогов. Возникает вопрос о содержании и современной трактовке контрольно-оценочной компетентности учителя, условиях ее развития и формирования при организации различных форм повышения квалификации.

Можно выделить основную тенденцию, в русле которой рассматривается вопрос об изменении контроля и оценки: перестройка процесса обучения и, соответственно, контрольно-оценочной деятельности на принципиально новой концептуальной основе личностно-деятельностного подхода к образованию [3]. Анализ требований ФГОС ОО и передовых педагогических практик дает возможность сформулировать основные положения, которые должны быть реализованы в контрольно-оценочной деятельности современного учителя. Но проблема состоит в том, насколько педагоги понимают эти идеи и насколько они реализуются в практике обучения.

Цели, задачи

Чтобы ответить на поставленные выше вопросы, необходимо определить, какие концептуальные идеи зафиксированы в нормативных документах, регламентирующих проектирование образовательного процесса в школе; какие из них востребованы сегодня практикой; на каких научных основаниях строится контрольно-оценочная деятельность педагога и в чем проявляется его контрольно-оценочная компетентность; какие формы повышения квалификации способствуют эффективному развитию этого вида компетенции.

В рамках решения данных проблем в системе повышения квалификации педагогов нами был предложен муниципальный проект «Современные подходы к контрольно-оценочной деятельности». Его цель — активизировать работу команд образовательных организаций общего образования по проблеме совершенствования контрольно-оценочной деятельности учителей и администрации на основе современных подходов, включиться в исследовательскую и методическую деятельность по этому направлению.

Разработка вопросов организации и содержания проекта в системе повышения квалификации педагогов была связана с выделением организационных и психолого-педагогических условий, реализация которых будет способствовать развитию контрольно-оценочной компетенции участников проекта и учителей образовательных организаций. Охарактеризуем некоторые из этих условий.

Организация, содержание и методы исследования

Одним из важнейших условий является добровольное участие образовательных организаций в выполнении проекта на основе понимания значимости этого вида деятельности и необходимости его совершенствования. После представления педагогическому сообществу замысла проекта, его организационных форм и содержания образовательные организации самоопределялись для участия в этой работе. Выразили желание участвовать в проекте образовательные организации общего образования города Иванова: МБОУ «СШ № 1», МБОУ «СШ № 14», МБОУ «СШ № 15», МБОУ «СШ № 17», МБОУ «СШ № 24», МБОУ «СШ № 28», МБОУ «Гимназия № 30», ЧОУ «Лицей Исток».

Предусматривалась командная работа, т. е. коллаборативная деятельность по выполнению проекта на основе создания группы педагогов-единомышленников из состава учителей и администрации каждой школы. Это условие также было выполнено: три-четыре человека от каждой школы стали участниками проектной деятельности.

Формами работы были установочные лекции (запуск проектов), семинары, посвященные обсуждению промежуточных результатов работы, консультации по вопросам обработки полученных эмпирических данных и подготовке к защите проектов.

Обратимся к характеристике основных теоретических и методических идей, составляющих содержание проектной деятельности.

Введение Федеральных государственных образовательных стандартов общего образования на различных его уровнях: начального, основного, среднего — в практику работы общеобразовательных организаций требует от всех субъектов образовательного процесса понимания содержания и смысла тех изменений, которые должны происходить в образовательном процессе, педагогической деятельности учителей и учебной деятельности учащихся. Важным моментом является осознание преемственности тех позиций, которые лежали в основе проектирования образовательного процесса в соответствии с Федеральным компонентом государственного образовательного стандарта общего образования (2004 г.), и содержательных идей, зафиксированных в новых нормативных документах. Рассмотрение этого вопроса через аспект изменений в контроле и оценке стало предметом нашего исследования в рамках муниципального проекта.

Анализ текстов ФГОС ОО свидетельствует о том, что там нет конкретно сформулированных требований к контрольно-оценочной деятельности учителя, а только фиксируются положения, которые должны быть отражены в образовательной программе образовательной организации в разделе «Система оценки планируемых результатов освоения ООП ОО». Примерная образовательная программа расширяет, углубляет и разъясняет эти требования, описывает подходы, принципы, процедуры, средства оценивания и т. д., которые могут быть отражены при разработке школой этого раздела своей образовательной программы. Здесь же приведены рекомендации в адрес образовательных организаций о необходимости разработки локального нормативного документа «Положение об оценке образовательных достижений учащихся», в котором должны отражаться положения из материалов ФГОС ООО (СОО) и Примерной ООП ООО (СОО), а также специфика школьной политики и тактики в сфере контроля и оценки (требования к выставлению отметки при различных формах контроля, систематичность контроля, средства контроля и оценки и т. д.).

Таким образом, данные документы задают вектор, идеологию системы оценки, а реализация этих идей осуществляется через контрольно-оценочную деятельность учителя и учащихся. Поэтому, чтобы понять, как и при каких условиях должен реализовываться этот раздел образовательной программы учителем в сотрудничестве с учащимися, необходимо выделить те ведущие идеи, которые заложены в образовательной программе, систему действий учителя и учащихся по их реализации.

На основе изучения текстов ФГОС ООО (СОО), Примерной основной образовательной программы основного общего образования, среднего общего образования, образовательных программ образовательных организаций мы выделили десять ключевых, на наш взгляд, положений. При формулировке положений использовали терминологию данных документов.

1. Система оценки основывается на подходах: системно-деятельностном, уровневом, комплексном, каждый из которых, в свою очередь, раскрывается также через систему основных идей.

2. Необходимо сочетание внешней и внутренней оценки.

3. Понятие внутренней оценки включает стартовую диагностику, текущую и тематическую оценку, внутренний мониторинг образовательных результатов, промежуточную и итоговую аттестацию учащихся.

4. Оцениваем способность учащихся к решению учебно-познавательных и учебно-практических задач, а не самих учащихся.

5. Должна производиться оценка проектов как средства развития УУД.

6. Текущая оценка рассматривается как формирующая (т. е. поддерживающая и направляющая ученика) и диагностическая (способствующая осознанию учителем и учеником проблем в обучении).

7. Необходимо введение самооценки и взаимооценки учащихся как основы формирования регулятивных УУД и условия для личностного продвижения.

8. Обязательно введение уровней оценки планируемых результатов: базового («ученик научится») и повышенного («ученик получит возможность научиться»).

9. Определяются критерии освоения всеми обучающимися базового уровня содержания образования.

10. Вводится аутентичное оценивание — портфолио.

Возникает вопрос, связанный с теоретическим обоснованием этих идей и целесообразности включения их в основу проектирования оценочного раздела образовательной программы. Наш анализ большого массива исследований российских и зарубежных ученых показывает, что данные идеи являются результатом этих исследований. Доказано, что их реализация в практике работы школы и конкретного учителя повышает качество образования, делает его ориентированным на потребности и возможности личности обучающегося.

Еще в первой половине XX века в работах Б. Г. Ананьева были сформулированы основные теоретические идеи гуманистического подхода к педагогической оценке [2]. В 60—70-х годах прошлого века значимыми работами в области контроля и оценки стали труды Ш. А. Амонашвили [1]. В XXI веке ученые все активнее начали изучать возможности деятельностного подхода при осуществлении контрольно-оценочной деятельности как педагогов, так и учащихся [6, 8, 9]. Использование в практике формирующей и диагностической (суммарной) оценок как фактора повышения результативности обучения рассматривается в ряде работ российских ученых [3, 4, 7, 10].

Таким образом, эти идеи «не выдумка чиновников», не желание авторов ФГОС ОО «развалить школу», а результаты достаточно серьезных исследований российских и зарубежных ученых, работающих в области эвалюации. Изучение опыта работы образовательных организаций в этом аспекте также свидетельствует, что данные идеи были востребованы практикой в конце XX и начале XXI века, что, собственно, и подтверждается нашими дальнейшими исследованиями.

Логика работы над школьными проектами была обусловлена выделением этапов, которые были апробированы нами в предыдущих исследованиях [4, 5]. Участники проекта направили свои усилия на поиск ответов по следующим направлениям: востребованы ли эти идеи практикой обучения в современных российских школах, осознаются ли они учителями, реализуются ли в их педагогической деятельности, как влияют на изменение взаимодействия с учащимися, на структуру и технологию урока, влияют ли на повышение качества результатов образования. Большинство проектов выполнялось на базе основного общего образования.

В процессе выполнения проекта были использованы следующие эмпирические методы: опрос, беседа и наблюдение. При разработке конкретных методик мы исходили из того, что контрольно-оценочную деятельность необходимо рассматривать как целостный феномен, состоящий из следующих структурных компонентов: целей, предмета, объекта, средств, результата. Предполагалось выяснить: 1) осознают ли учителя структуру контрольно-оценочной деятельности, 2) понимают и осознают ли те требования, которые зафиксированы в образовательной программе школы, 3) могут ли сформулировать характер изменений, которые произошли в каждом компоненте их контрольно-оценочной деятельности.

Нами была разработана специальная методика опроса учителей, суть которой состоит в выявлении самооценки действий по осуществлению контрольно-оценочной деятельности. Мы остановились на операциональном компоненте контрольно-оценочной деятельности, выделив действенную и инструментальную ее части. Вычлененные из текста ФГОС ООО и Примерной основной образовательной программы идеи, на которых должна строиться система оценки планируемых результатов, мы «перевели» в деятельностную форму, сформулировав основные действия учителя при реализации контрольно-оценочной деятельности. Заметим, что при выделении действий использовались и результаты опроса учителей, которые принимали участие в пилотажном этапе [4]. В ответах на открытые вопросы учителями были сформулированы действия или положения, которые можно перевести в действия, отражающие мнения педагогов о требованиях ФГОС ООО к контролю и оценке.

Были выделены одиннадцать действий, представленных в таблице. Понятно, что можно было составить и более длинный перечень или более детально расписать каждое действие, но мы сочли возможным для исследования ограничиться этими оценочными действиями, предоставив возможность респондентам самим дополнить их (позиция 12 — «Ваш вариант»).

Действия учителя при осуществлении контроля и оценки

1	Осуществляю мониторинг динамики предметных результатов каждого обучающегося
2	Использую формирующую оценку при оценивании в классе
3	Использую тестирование, контрольно-измерительные материалы, компьютерное тестирование для оценки предметных результатов
4	Использую разноуровневые самостоятельные и контрольные работы
5	Провожу оценку на критериальной основе, формулирую критерии отметки за каждый вид работы
6	Использую различные шкалы оценивания для различных видов контроля
7	Включаю обучающихся в самоконтроль, самооценку и взаимооценку
8	Провожу оценку проектов, которыми руковожу
9	Использую портфолио как вид оценивания
10	Провожу различные виды рефлексии (предметную, деятельностную, личностную) на уроке
11	Оцениваю как предметные, так и метапредметные результаты освоения образовательной программы учащимися
12	Ваш вариант

Учитель, ознакомившись в тексте методики с формулировкой того или иного действия, должен был определить отношение к нему по следующим позициям: осуществлял и до введения ФГОС ООО (системно, эпизодически), осуществляю (реализую) после введения ФГОС ООО (системно, эпизодически); не делаю в силу обстоятельств (нет условий), не делаю, так как не считаю нужным (или не знаю, не понимаю и т. д.).

После обработки эмпирических данных, полученных в ходе опроса учителей, проводилась более углубленная беседа с педагогами, что позволило установить, понимают ли они данные положения, могут ли привести примеры, пояснения, аргументы и др. Затем выборочно использовался метод наблюдения, в результате которого уже можно было более объективно определить особенности контрольно-оценочной деятельности отдельных педагогов. На основе полученного материала участники проекта делали выводы и обобщения, формулировали рекомендации в адрес администрации и педагогов, что позволило реально изменять ситуацию в школе.

Мы отдаем себе отчет, что полученные участниками проекта факты и выводы носят ограниченный характер, но для муниципальной методической службы проведенный анализ послужил обоснованием для определения содержания и форм работы с учителями и руководителями школ в аспекте реализации данного раздела образовательной программы. Обсуждение с педагогами полученных данных стимулирует их профессиональную рефлексию, осознание положительных сторон своей контрольно-оценочной деятельности, проблемных сторон деятельности и путей их разрешения.

Продукт и результат

Продуктом, который получила команда каждой образовательной организации, стали данные о степени знакомства и реализации педагогами данной школы основных современных идей контрольно-оценочной деятельности, выступления участников проектов на педагогических советах, на занятиях семинара, конференции и представление материалов в сборнике [11].

А результаты мы видим в тех изменениях, которые произошли в новообразованиях педагогов: знаниях, способах деятельности, опыте, т. е. в их контрольно-оценочной компетентности. Рефлексия участников проекта свидетельствует о совершенствовании и когнитивного компонента этой компетентности, и операционально-действенного. Так, расширилось представление учителей о современных подходах к контрольно-оценочной деятельности, ее целях и задачах, нормативных требованиях, об инструментах и условиях продуктивного их применения, способах анализа результатов контроля уровня учебных достижений учащихся; произошло освоение новых умений, связанных с формирующим оцениванием; приобретен опыт рефлексивной деятельности.

Приведем несколько высказываний участников по результатам выполненного проекта, свидетельствующих о понимании ими тех изменений, которые необходимы в школе, а также конкретные рекомендации по совершенствованию системы контроля и оценки в образовательной организации:

«Анализ результатов исследования явно показал необходимость восстановления и налаживания системы кураторства в школе. Молодые специалисты обладают современной теоретической базой знаний, почерпнутой в высшей школе, а педагоги высшей квалификационной категории, помимо регулярно обновляемых знаний, обладают неоценимым опытом, которым смогут поделиться с коллегами. Таким образом, мы можем сделать вывод о необходимости симбиоза педагогов разных квалификационных категорий для совершенствования системы контрольно-оценочной деятельности (КОД) в нашем учебном заведении» [11, с. 15];

«Результаты исследования вызвали необходимость следующих управленческих решений (на уровне педагога):

— разработать план профессионального саморазвития с целью преодоления профессиональных дефицитов, выявленных в ходе процедур оценки качества образования, и повышения качества обучения школьников (план самообразования);

— отобрать современные формы, приемы и способы работы с обучающимися (в том числе при проведении оценочных процедур);

— совершенствовать рабочие программы и оценочные материалы для проведения текущего контроля и учета успеваемости обучающихся, промежуточной аттестации, а также оптимизации методов и приемов урочной и внеурочной деятельности, уточнения форм работы с родителями обучающихся» [11, с. 28];

«Подводя итоги, хочется сказать, что работа в рамках этого муниципального проекта позволила нам глубже проанализировать проблемы, связанные с новыми подходами к контрольно-оценочной деятельности, выявить “точки роста” и принять административные и педагогические решения для повышения эффективности системы оценки качества в нашем учреждении, направленной на улучшение всего образовательного процесса» [11, с. 37].

Выводы

Таким образом, можно сделать вывод, что такая форма повышения квалификации педагогов, как муниципальный проект, способна стать эффективным средством развития их контрольно-оценочной компетентности, если будут соблюдены следующие условия:

— добровольное участие образовательных организаций в выполнении проекта на основе понимания значимости этого вида деятельности и необходимости его совершенствования;

— коллаборативная деятельность по выполнению проекта на основе создания команды единомышленников из педагогов каждой школы;

— наличие научного и методического сопровождения выполнения проекта;

— сотрудничество и сотворчество на основе взаимодействия с научным и методическим руководителем проекта;

— включение участников проекта в исследовательскую деятельность;

— единая теоретическая и методическая база для выполнения проекта, наличие методик изучения особенностей этой деятельности и способов обработки полученных эмпирических данных;

— вовлечение большей части педагогов каждой школы в рефлексию своего опыта контрольно-оценочной деятельности и уровня развития контрольно-оценочной компетентности;

— возможность обмена мнениями среди участников проекта, обобщение и выступления участников проекта с результатами на педагогических советах в образовательной организации;

— подготовка своих проектов, защита их в рамках конференции, публикация материалов в сборнике.

Анализ эмпирического материала, полученного в проекте, также позволил сделать следующие содержательные обобщения:

1. В практике оценочной деятельности учителей особенно вызывает затруднения оценка метапредметных результатов (инструмент, фиксация, интерпретация результата).

2. На уроках используется критериальное оценивание, формирующее оценивание, включение учащихся в самооценку и взаимооценку, но большая часть учителей нашей выборки делает это эпизодически, а не системно, не включает учащихся в составление и осмысление критериев оценивания.

3. На уроках мало используются уровневые задания, а если и используются, то не всегда методически грамотно.

4. Не стимулируется деятельность учащихся по отбору работ в свой портфолио и т. д.

Проведенная работа позволяет нам, рассматривая контроль и оценку с деятельностных позиций, через конкретные действия учителя, уточнить содержание понятия «контрольно-оценочная компетентность учителя» в соответствии с содержательными идеями, отраженными в материалах ФГОС ОО, современными идеями теории и практики.

Разработка содержательного паспорта контрольно-оценочной компетенции, где отражаются знания, умения, опыт (владение), дает возможность опираться на него при проектировании специального модуля, направленного на формирование этой компетенции, в системе подготовки в вузах и системе повышения квалификации педагогов. Предложенный материал может использоваться в качестве ориентировочной основы для проведения в школах исследовательской и методической работы, направленной на решение задач совершенствования контрольно-оценочной деятельности учителя и учащихся в соответствии с требованиями ФГОС ОО и актуальными научными тенденциями.

Библиографический список

1. *Амонашвили Ш. А.* Воспитательная и образовательная функция оценки учения школьников. М.: Педагогика, 1984. 268 с.
2. *Ананьев Б. Г.* Психология педагогической оценки // Ананьев Б. Г. Избранные психологические труды: в 2 т. М.: Педагогика, 1980. Т. 2. С. 128—268.
3. *Воронова Т. А.* Изучение проблем контроля и оценки на основе компетентностно-деятельностного подхода // Вестник Ивановского государственного университета. 2009. Вып. 1. С. 3—15.
4. *Воронова Т. А., Малыгин А. А.* Изменения в контрольно-оценочной деятельности учителей и учащихся в соответствии с требованиями ФГОС ООО // Тенденции развития образования: кто и как использует и оценивает образовательные стандарты: материалы XIV ежегодной Международной конференции (Москва, 16—18 февраля, 2017). М.: Дело, 2018. С. 163—176.
5. *Воронова Т. А., Малыгин А. А.* Нормативные и психолого-педагогические подходы к независимой оценке качества условий образовательной деятельности образовательных организаций // Вестник Ивановского государственного университета. 2018. Вып. 1. С. 27—36.
6. *Воронцов А. Б.* Формирующее оценивание: подходы, содержание, эволюция: краткое пособие по деятельностной педагогике. М.: Автор. клуб, 2018. 166 с.
7. *Звонников В. И., Челышкова М. Б.* Современные средства оценивания результатов обучения: учебное пособие для студентов высших учебных заведений. М.: Академия, 2013. 304 с.
8. *Крылова О. Н., Бойцова Е. Г.* Приемы формирующего оценивания. Методический конструктор. М.: Русское слово, 2016. 80 с.
9. Метапредметные и личностные образовательные результаты школьников: новые практики формирования и оценивания: учебно-методическое пособие / под общ. ред. О. Б. Даутовой, Е. Ю. Игнатьевой. СПб.: КАРО, 2015. 160 с. (Петербургский вектор внедрения ФГОС ООО).
10. *Пинская М. А.* Формирующее оценивание: оценивание в классе: учебное пособие. М.: Логос, 2010. 264 с.
11. Современные подходы к контрольно-оценочной деятельности: материалы по итогам реализации муниципального проекта / сост. Н. В. Чугунова; науч. ред. Т. А. Воронова. Иваново: Метод. центр в системе образования, 2018. 57 с.

УДК 371.3

С. Р. Когаловский

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ МЕТОДИЧЕСКОМ ВОПРОСЕ

В заметке показывается, что рутинный метод обучения необходим не только как способствующий формированию и развитию координаций действий и не просто как метод, приводящий к хорошей выучке, но и как средство формирования и развития теоретического мышления.

***Ключевые слова*:** рутинное обучение; надпредметный уровень мышления; теоретическое мышление; знаковые формы; знаковая модель.

S. R. Kogalovskii

ABOUT A PARTICULAR METHODICAL PROBLEM

The note shows that the routine method of teaching is necessary not only as contributing to the formation and development of action coordination and not just as a method leading to good training, but also as a means of forming and developing theoretical thinking.

***Key words*:** routine training; meta-object level of thinking; theoretical thinking; sign forms; sign model.

Настоящая заметка посвящена, казалось бы, весьма частному методическому вопросу. Еще полвека назад в обучении математике широко использовалось большое количество задач на упрощение сложных алгебраических выражений. Сейчас такие задачи используются довольно редко. Что же принесло очищение методов обучения от этой и другой рутины?

По сравнению с бытовавшими полвека назад и ранее методами обучения сегодняшние методы отличаются большей емкостью, большей энергетичностью, большей направленностью на развивающее обучение школьников. Однако в массе уровень сегодняшней их подготовки стал существенно ниже. Конечно, в немалой степени этому способствует ломка сложившихся за 70 лет социальных отношений, сопровождающаяся уходом от ценностей и подменой их «полезностями». Этому способствует и широкое использование в обучении компьютеров, несущее возможности формирования и развития у школьников многомерного мышления, но пока еще более преуспевающее в формировании у них клипового мышления.

Не способствуют ли понижению уровня подготовки школьников, и притом не в меньшей степени, очищения от названной выше и подобной ей рутины? Вот аргументы, не оставляющие камня на камне от этого еретического вопроса: «*Учебная задача* <в смысле Эльконина — Давыдова> *существенно отличается от многообразных частных задач, входящих в тот или иной класс. Так, имея дело с последними, школьники овладевают столь же частными способами их решения. Лишь в процессе тренировки они усваивают некоторый общий способ их решения. Усвоение этого способа происходит* *путем перехода мысли от частного к общему. Вместе с тем при решении учебной задачи они первоначально овладевают общим способом решения частных задач. Решение учебной задачи важно не только для данного частного случая, но и для всех однородных случаев. Мысль школьников движется при этом от общего к частному. При выделении и усвоении общего способа решения частных задач школьники сопоставляют пути решения многих частных задач, выделяя при этом некий общий путь… Однако в психологии был выявлен и принципиально иной путь формирования у школьников обобщенного способа решения задач… Некоторые ученики, столкнувшись лишь с одной… частной задачей, стремятся подвергнуть ее такому анализу, чтобы выделить внутреннюю связь ее условий, отвлекаясь при этом от частных их особенностей. Решая первую конкретную задачу данного типа, они, если можно так выразиться, тем самым решали все задачи данного типа… Такое обобщение «с места» «является обобщением, носящим теоретический характер, а та одна конкретная задача, при решении которой школьники как бы решают все задачи данного класса, — это учебная задача, требующая анализа и теоретического (или содержательного) обобщения*» [2, с. 158—159]. Такой подход к обучению контрастирует с традиционным подходом, при котором «*для формирования обобщенного способа решения типовой ... задачи ... иногда предлагается до 20—30 аналогичных задач*»! [там же].

Всегда ли, однако, срабатывает такой инновационный подход? Всегда ли принципиальное понимание является тем самым и деятельным пониманием? Иначе говоря, всегда ли понимание принципа решения того или иного типа задач несет и умение результативно его воплощать?

Да и так ли правомерно квалифицировать обсуждаемый вопрос как весьма частный? Как было показано Л. С. Выготским, знаки — это психологические орудия, усиливающие мыслительные и поведенческие способности. Развитые знаковые системы являются и эффективными орудиями поисково-исследовательской деятельности.

Обратимся к следующему суждению: «*Подлинные функции знаковой формы в мышлении могут быть поняты только при ее соотнесении с определенным типом объективного содержания, замещаемого этой формой. Моделирующие “движения” в плоскости знаковой формы впитывают в себя опыт исходных предметных действий, и в сокращенном, свернутом виде воспроизводят их применительно к объекту-заместителю*» [1, с. 346]. Даже древние знаковые системы арифметики натуральных чисел, основывавшейся на тех или иных формах структуризации количеств, использовали отвечающие им и постольку имевшие свернутый вид формы представления и самих количеств и операций над ними. Но такой же ли характер имеют сокращения, возможности которых несомы знаковыми средствами алгебры? Отвечают ли *«моделирующие “движения” в плоскости* <алгебраической> *знаковой формы»* только «*опыту исходных предметных,* <арифметических>, *действий»* или они основываются на качественно новом опыте, обретаемом работой с алгебраическими моделями арифметических выражений, на новых знаниях, умениях и навыках, на новых стратегиях и тактиках внимания, являющихся продуктами этого нового опыта? Попытаемся найти ответы на эти вопросы, исследуя решения следующих задач.

Задача 1. Вычислить A2021^2-A2020$\cdot$A2022, где A обозначает $\mathbf{10^{10000000000}}$ раз повторенную цифру 1.

Работать непосредственно с этим арифметическим выражением, строящимся из столь огромных чисел, невозможно. Весьма не просто здесь и использование компьютера. Радикальную помощь несет алгебраическая знаковая система: структура=модель данного выражения представляется выражением a^2-(a-1)(a+1)**,** тождественно равным 1.

Используя язык элементарной алгебры, мы построили знаковую модель структуры данного выражения, являющуюся его продуктивной моделью. Но эта модель не отражает «*опыт исходных предметных действий*» с такими трансцендентально огромными числами. Решающим моментом было использование стратегии подхода к данному выражению как к целому. Эта стратегия предполагает рассмотрение его компонентов в соотнесении с этим целым и в их взаимной соотнесенности. При этом его структура была отражена в знаковой форме лишь с такой степенью конкретности, какая несла бóльшую эффективность решения задачи. Эта стратегия используется и в решениях последующих задач.

Задача 2. Вычислить $\left(\sqrt{0{,}11}-\dfrac{\sqrt[4]{0{,}001331}+1}{\sqrt[4]{0{,}11}+1}\right)^{-1}-\dfrac{\sqrt[4]{0{,}001331}+\sqrt{0{,}11}}{\sqrt{0{,}11}-1}$ с точностью до 0,001.

Заданное выражение строится из «стандартных блоков» $\sqrt[4]{0{,}11}$ и $\sqrt[4]{0{,}001331}$.

Априори неясно, с какой точностью следует их вычислить для достижения требуемой точности всего заданного выражения. Преобразование этого выражения к более простому виду позволило бы прояснить этот вопрос. Его целесообразно пытаться осуществить посредством преобразования к более простому виду следующего алгебраического выражения, представляющего его структуру:

$$\left(A^2-\frac{B+1}{A+1}\right)^{-1}-\frac{B+A^2}{A^2-1}, \tag{1}$$

Но оно не приводимо к более простому виду. Заметим, однако, что 0,001331=(0,11)^3. Учитывая эту специфику данного выражения, преобразуем выражение (1) в более частное выражение подстановкой в него A^3 вместо B:

$$\left(A^2-\frac{A^3+1}{A+1}\right)^{-1}-\frac{A^3+A^2}{A^2-1}, \tag{2}$$

Выражение (2) более конкретным образом представляет заданное выражение и за счет этого допускает значительное упрощение: оно преобразуется в −(A+1). Следовательно, заданное выражение равно $-\left(\sqrt[4]{0{,}11}+1\right)$. Задача сводится к вычислению $\sqrt[4]{0{,}11}$ с точностью до 0,001.

Задача 3. Простым или составным является число 8027 ?

Вот простое решение этой задачи:

$8027=8000+27=20^3+3^3=(20+3)(20^2-20.3+3^2)$.

Множители 20+3 и 20^2-20.3+3^2 больше 1. Отсюда ясно, что заданное число составное.

Решение основывается на применении формулы $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, выражающей общую закономерность, относящуюся к числам. По отношению к равенствам, относящимся к тем или иным конкретным числам, эта формула имеет надпредметный, конкретней говоря, над-арифметический характер. Она и открывается на над-арифметическом уровне.

Сама способность усмотрения структурных особенностей арифметического выражения или какого-либо его компонента, несущих прячущуюся за «цифирями» возможность эффективного применения подобных формул, формируется наращиванием опыта работы, во многом рутинной, с такого рода выражениями. Такой опыт формирует способность к усмотрениям в алгебраических или частных арифметических выражениях их *иконичность* и тем несет наращивание дальновидения и дальнодействия мышления учащихся.

Уже решения рассмотренных задач показывают, что опыт работы с конкретными числами, опыт действий только на предметном (арифметическом) уровне не обеспечивает осуществление в свернутом виде эффективных «*моделирующих "движений" в плоскости знаковой формы*». Эти движения не столько воспроизводят предметные действия, сколько являются «движениями» на надпредметном уровне. Освоение же надпредметной деятельности нуждается в освоении иного, особого опыта.

Задача 4. Вычислить $(177^2-123^2)/54$.

Легко усматривается, что 177-123=54, а так как $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, то числитель заданного выражения равен $54 \cdot 300$, и потому это выражение равно 300.

Здесь настолько же ясно то, в какой мере приведенные моделирующие “движения” отвечают процитированному суждению.

Задача 5. Верно ли, что произведение любых *k* последовательных натуральных чисел делится на *k!*?

Задача состоит в том, чтобы проверить, для всякого ли натурального n произведение $n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)$ делится на k!. Иначе говоря, надо проверить, для всякого ли натурального n число

$$C=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!}$$

целое. Но ведь это число есть C_{n+k-1}^{k}, то есть число k-элементных подмножеств (n+k-1)-элементного множества, а значит, целое число.

Комбинаторное истолкование выражения C выступает как его эффективно работающая модель. Такое истолкование есть результат *усмотрения* комбинаторного содержания в *форме* этого знакового выражения. Подобные усмотрения едва ли возможны без опыта работы с такими выражениями.

Задача 6. Вычислить сумму

$$S=(4-\sqrt[3]{2})(4-\sqrt[3]{9})(4-\sqrt[3]{12})+\sqrt[3]{2}(4-\sqrt[3]{9})(4-\sqrt[3]{12})+(4-\sqrt[3]{2})\sqrt[3]{9}(4-\sqrt[3]{12})+$$
$$+(4-\sqrt[3]{2})(4-\sqrt[3]{9})\sqrt[3]{12}+(4-\sqrt[3]{2})\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2}(4-\sqrt[3]{9})\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{9}(4-\sqrt[3]{12}).$$

Обозначим число $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$ через p_1, число $\frac{\sqrt[3]{9}}{4}$ — через p_2, число $\frac{\sqrt[3]{12}}{4}$ — через p_3.

$$\frac{S}{4^3}=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)+p_1(1-p_2)(1-p_3)+(1-p_1)p_2(1-p_3)+$$
$$+(1-p_1)(1-p_2)p_3+p_1p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3.$$

Пусть A_1, A_2, A_3 — независимые события, вероятности которых — p_1, p_2 p_3. Тогда правая часть равенства выражает вероятность события B, состоящего в том, что происходит не более двух из событий A_1, A_2, A_3. Так как $p(B)=1-p(\overline{B})=1-p_1 p_2 p_3$, то

$$S=4^3(1-p_1 p_1 p_1)=4^3\left(1-\frac{\sqrt[3]{2}}{4}\;\frac{\sqrt[3]{9}}{4}\;\frac{\sqrt[3]{12}}{4}\right)=4^3-\sqrt[3]{2}\;\sqrt[3]{9}\;\sqrt[3]{12}=58.$$

Прежде всего, заметим, что приведенное решение демонстрирует такое эффективное использование знакового моделирования, при котором *"движения" «в плоскости знаковой формы»* имеют отнюдь не сокращенный, не свернутый вид по сравнению с «*исходными предметными действиями*».

Эффективность решение этой задачи несет «погружение» заданного арифметического выражения в вероятностный контекст. Возможность такого «погружения» открывается усмотрением близости этого выражения подходящей вероятностной форме. Возможно ли такое усмотрение без опыта решения вероятностных задач, без многократных обращений к соответствующим знаковым формам? Возможно ли без должного опыта работы с алгебраическими выражениями, без приобщенности к соответствующим прецедентам-образцам находить такие эффективные решения задач, которые являются решениями «иноприродных» задач?

Здесь естественно вновь обратиться к цитате из [1]: «*Подлинные функции знаковой формы в мышлении могут быть поняты только при ее соотнесении с определенным типом объективного содержания, замещаемого этой формой…»*. Решения рассмотренных задач показывают, что эти «*подлинные функции»* раскрываются *только тогда*, когда «*определенный тип объективного содержания*» не замещается, а «созидается» этой знаковой формой как эффективным орудием исследовательской деятельности, как формой надпредметной деятельности.

Попутно отметим продуктивность обращений к задачам следующего типа: по заданной вероятностной/комбинаторной *знаковой форме* найти отвечающую ей, выразимую ею вероятностную/комбинаторную ситуацию. Вот примеры таких задач:

**Построить вероятностную задачу, решением которой является сумма ряда*

$$(1-p)p+(1-p)^2p+(1-p)^3p+\ldots,$$

где p — *положительное число, меньшее* 1. *Найти значение этой суммы, не используя предельный переход.*

***Найти комбинаторные истолкования следующих выражений:*

а) $C_m^0\ C_n^0+C_m^1\ C_n^1+\ldots+C_m^m\cdot C_n^m$.

б) $C_m^0\cdot C_n^m+C_m^1\cdot C_n^{m-1}+C_m^2\cdot\ \ C_n^{m-2}+\ldots+C_m^m\cdot C_n^0$

в) $1\cdot C_n^1+\ldots+n\cdot C_n^n$

Задача 7. Вычислить с точностью до 0,001:

$$\frac{\sqrt{1{,}4+\sqrt{0{,}96}}+\sqrt{1{,}4-\sqrt{0{,}96}}}{\sqrt{1{,}4+\sqrt{0{,}96}}-\sqrt{1{,}4-\sqrt{0{,}96}}}-\frac{\sqrt{1{,}4+\sqrt{0{,}96}}-\sqrt{1{,}4-\sqrt{0{,}96}}}{\sqrt{1{,}4+\sqrt{0{,}96}}+\sqrt{1{,}4-\sqrt{0{,}96}}}.$$

Напрашивается осуществление упрощений числителя и знаменателя первой дроби. Тем самым будет осуществлено и упрощение второй дроби.

Не экономней ли, однако, такие упрощения осуществлять не непосредственно, а в алгебраическом выражении

$$\frac{\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}}{\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}}-\frac{\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}}{\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}}, \qquad (1)$$

представляющем структуру заданного выражения и потому являющемся его моделью? Но более существенным аргументом в пользу обращения к этой модели является то, что преобразования компонентов алгебраического выражения как целого, не соотносимые со структурой этого целого, вообще говоря, могут приводить к локальным упрощениям, препятствующим более радикальным упрощениям целого.

Сказанное оправдывает обращение к выражению

$$\frac{\sqrt{C}+\sqrt{D}}{\sqrt{C}-\sqrt{D}}-\frac{\sqrt{C}-\sqrt{D}}{\sqrt{C}+\sqrt{D}} \qquad (2)$$

представляющему структуру выражения (1), а значит, и структуру заданного выражения, и потому являющемуся его моделью.

Рациональное выражение

$$\frac{E+F}{E-F}-\frac{E-F}{E+F}, \qquad (3)$$

представляет структуру выражения (2), а значит, и структуру заданного выражения, и потому является его моделью. Оно легко преобразуемо в $\frac{4EF}{E^2-F^2}$.Отсюда находим, что исходное арифметическое выражение равно $\frac{5}{6}\sqrt{6}$. Задача сводится к вычислению $\sqrt{6}$ с точностью до 0,001.

Процесс решения задачи сопровождался трехступенным абстрагированием-свертыванием-моделированием. При этом каждое из выражений (1), (2) и (3), вводившееся как средство анализа исходного выражения, как выражение его структуры, как его модель, само превращалось в предмет аналогичного рассмотрения. Это свидетельствует о богатых выразительных возможностях алгебраической знаковой системы, о том, что она несет возможность выражать надпредметные планы по отношению к алгебраическим же отношениям. Это говорит и о том, что овладение знаковым языком алгебры, его выразительными возможностями является эффективным средством математического развития учащихся, а с ним общего их интеллектуального развития.

Обращение к подобным задачам открывает несомые языком алгебры возможности формирования привычки настраивать внимание на восприятие исследуемой ситуации в целом и способности к такому восприятию, способности схватывать, выражать, обыгрывать и преобразовывать структуру=модель целого, способности, являющейся важным компонентом математической и общей интеллектуальной культуры. Уже первичное овладение языком алгебры открывает возможность выражать общие формы арифметических и алгебраических задач и общие формы их решения и делать сами эти общие формы предметом исследования, а тем самым восходить на теоретический уровень мышления. Оно способствует превращению алгебраических знаковых выражений в зримые представления исследуемых ситуаций и эффективных путей их преобразования и несет развитие надпредметных уровней мышления, а тем самым возрастание его дальновидения и дальнодействия.

Освоение математической знаковой системы, несущее превращение восприятия знаковых выражений как знаков условных в знаки «иконические», ведет к рождению новой системы образов, вырастающей «над» этой системой и преобразующей ориентировочную и метаориентировочную деятельности. Освоенность того или иного поля математической деятельности проявляется в рождении такого новообразования.

Рассмотренные решения задач помогают осознать, что метод обучения, названный в начале заметки рутинным и во многом оправдывающий такую его квалификацию, необходим не только как способствующий формированию эффективных координаций действий, не только как несущий деятельное понимание, и не просто как метод, приводящий к хорошей выучке, но как необходимое средство формирования и развития теоретического мышления.

Традиционная система обучения математике издавна располагает эффективными и «природосообразными» методами формирования и развития теоретического мышления учащихся. Но под давлением новых достижений в стратегиях обучения, представляемых системами развивающего обучения, в таких методах видят всего лишь рутину, тянущую обучение вниз и препятствующую реализации этих достижений. Правда же — не в отрицании инноваций, но и не в отрицании традиционной системы обучения, несущей в себе богатое историческое наследие, а в формировании и реализации таких систем развивающего обучения математике, которые сохраняли бы непреходящие достижения традиционной системы и тем самым несли в себе средства, обеспечивающие достижение своих целей. А для этого необходим непредвзятый и основательный анализ методов традиционной системы обучения математике (и не только математике), соотнесение их с сегодняшними целями обучения и методами, используемыми системами развивающего обучения. Такой анализ должен исходить из осознания существа различий традиционной системы обучения и систем развивающего обучения.

Особенно зримо предстает существо различий традиционной системы и системы Эльконина-Давыдова (применительно к начальной школе), делающих эти системы противоположностями: если первая основывается на интенсивном и многостороннем развитии эмпирического мышления учащихся и на «выращивании» теоретического мышления в его лоне, то вторая характеризуется целостным, системным подходом к формированию и развитию теоретического мышления, осуществляемым «сверху». Такой подход осуществляется посредством отказа от использования принципа *от частного к общему*, усиливающим направленность на восхождение «с места» на уровень теоретического мышления. Все это заставляет видеть в средствах обучения, заложенных в названные системы, взаимно дополнительные страты, взаимно дополнительные аспекты будущих систем развивающего обучения.

Библиографический список

1. *Давыдов В. В.* Виды обобщения в обучении. Логико-психологические проблемы построения учебных предметов. М.: Педагогика, 1972. 424 с.
2. *Давыдов В. В.* Теория развивающего обучения. М.: Интор, 1997. 542 с.

УДК 331.101.232

И. В. Курникова

РОЛЬ ГЕНДЕРНОЙ ПОЛИТИКИ В ПОВЫШЕНИИ СТОИМОСТИ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО КАПИТАЛА

Рассматриваются проблемы органичного сочетания женского и мужского труда в рамках экономических и общественных отношений. Ставится вопрос о необходимости повышения гендерных пропорций в сфере образования.

Ключевые слова: гендер, общество, мужчина, женщина, труд, экономика.

I. V. Kournikova

THE ROLE OF GENDER POLICY IN ENHANCING VALUE OF HUMAN CAPITAL

The problems of the harmonious combination of female and male work are considered in the framework of economic and social relations. There is a question about the need to increase gender proportions in the field of education.

Key words: gender, socium, man, women, labour, economy.

Термин «гендер» в формальном переводе на русский язык означает «пол». Однако, в реальном восприятии этого термина необходимо учитывать, что понятие «пол» в русском языке имеет чисто физиологический аспект, в то время как термин «гендер» к физиологии не имеет никакого отношения. Дело в том, что в английском языке существует различие между понятием пол, обозначающим физиологическую категорию («sex») и понятием «gender», обозначающим пол как категорию общественных отношений. Именно в этом понимании термин «гендер» используется в теории и практике общественных наук, а гендерные отношения характеризуют отношения полов в рамках единого социума.

Соответственно гендерная политика должна определять такие пути вовлечения мужчин и женщин в экономическую и общественную жизнь, которые будут способствовать росту эффективности экономики и гармонии общества.

На наш взгляд, неправомерно понимать гендерную политику как инструмент обеспечения равноправия женщин и мужчин, что можно видеть в некоторых источниках. Узкое понимание гендерной политики имело право на существование в начале и середине прошлого века, когда права женщин во многих странах были законодательно ограничены, и за отмену этих ограничений была необходима борьба, в том числе и с помощью научного обоснования. Сегодня эти ограничения сняты практически во всех развитых странах, и необходимость борьбы за равноправие полов сменяется необходимостью планирования и управления такого сочетания мужского и женского труда, которое обеспечит максимальную эффективность экономических процессов.

Различия в востребованности мужского и женского труда определяются, главным образом, двумя факторами:

1) физиологическими особенностями женского и мужского организма, позволяющими выполнять определенные виды труда с разной степенью эффективности;

2) традициями (историческими, национальными, экономическими) применения в тех или иных сферах преимущественно мужского или женского труда.

Что касается первого аспекта, то применение мер внешнего регулирования в этом случае вряд ли целесообразно. Эффект могут дать лишь четкие и научно-обоснованные методы профотбора. Хотя и здесь научно-технический прогресс, меняя содержание труда различных видов, может вносить существенные различия в гендерные пропорции того или иного вида труда. Так, например, применение ручного труда на погрузо-разгрузочных работах, сделало профессию грузчика прерогативой мужчин, однако широкое использования технических средств (электрокары, подъемники и т. д.), позволило женщинам активно осваивать этот вид труда.

Упрощение и облегчение управления автомобилем (автоматическая коробка передач, гидроусилитель руля, электроника) сделало труд водителя одинаково доступным как для мужчин, так и для женщин. С очень большой долей вероятности в ближайшее время значительно изменится гендерная структура рабочих станочников в машиностроении. Применение станков с программным обеспечением приводит к тому, что образ станочника как человека в промасленной робе и с запыленным лицом трансформируется в белый халат и монитор компьютера, как основного средства труда.

Сложнее обстоит дело с традициями в гендерных отношениях, ломать которые подчас очень сложно и применение методов внешнего управления здесь вполне допустимо и оправданно.

Предметом нашего рассмотрения является сфера образования, прежде всего, детей дошкольного и младшего школьного возраста. Сегодня во многих средствах коммуникаций, как научных, так и публичных, на слуху понятие «человеческий капитал». Суть проблемы в том, что под воздействием цифровизации происходит смещение центра тяжести в сторону человека, как главного источника экономических и общественных благ. Традиционные составляющие капитала заложены и изложены А. Смитом в его работе «Исследования о природе и причинах богатства народов». Таковыми являются как материально-вещественные факторы процесса труда (предметы труда, средства труда), так и денежные средства в различных формах. В силу вышеуказанных причин, к этим составляющим добавляется человек, как совокупность и сочетание личных, деловых и профессиональных качеств, позволяющим ему эффективно управлять материальными и денежными факторами капитала. Вложения в человеческий капитал признаются наиболее эффективными как для стратегического развития отдельного предприятия, так и общества в целом.

Еще одна проблема состоит в том, что понимать под термином «человеческий капитал». Очень часто это понятие трактуется как совокупность знаний, умений и навыков, позволяющих выполнять труд заданной сложности с определенной степенью эффективности. На наш взгляд, такая трактовка слишком узкая, и в определенной мере отождествляет человека с машиной, обладающей набором свойств. Понятие человеческого капитала гораздо шире и включает такие факторы как духовный потенциал, культурные и нравственные ценности, мировоззрение, словом, все то, что определяет место человека не только в экономике, но и в социуме. Эти факторы формируются у человека с раннего детства, по мнению специалистов их основы закладываются в 3-х — 10-ти летнем возрасте. Именно в этот период ребенок входит в общественную жизнь, посещая образовательное учреждение (детский сад и начальную школу). Причем воспитательная составляющая имеет в это время более важное значение, чем образовательная, поскольку личность человека находится в стадии формирования. Необходимо, чтобы в воспитании ребенка сочетался как мужской, так и женский труд. Детский сад и начальная школа должны стать своеобразной социальной моделью семьи, где гармонично сочетается как мужское, так и женское начало. Тем не менее, традиционно сложилось так, что основными работниками детских садов и начальных школ являются женщины. По данным статистики в России в детских садах воспитателей мужчин менее 1 %, учителей начальных школ менее 3 %. На наш взгляд, это как раз та традиция, которую необходимо нарушить, обеспечив более интенсивный приток мужского труда в сферу образования и воспитания детей младшего возраста.

Для этого должны использоваться как экономические, так и административные рычаги. В первом варианте это существенное повышение оплаты труда в отрасли. Заработная плата учителя-воспитателя должна быть приравнена к заработной плате специалиста среднего звена вебдущих производственных отраслей, как это имеет место в ряде европейских стран, в частности, Швеции и Англии. В качестве административной меры можно предложить, по крайней мере в бюджетных учреждениях, установление норматива минимального соотношения мужчин и женщин. Такой норматив может составлять, к примеру, 70 : 30 в ту или другую сторону. Положительный зарубежный опыт в этом отношении так же имеется.

Понятно, что предлагаемые меры могут быть предметом дискуссий, но то, что проблема должна решаться именно в рамках гендерной политики, сомнений не взывает.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БАРИНОВА Марина Олеговна — кандидат биологических наук, доцент кафедры биологии, Институт математики, информационных технологий и естественных наук, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, nayka@list.ru

BARINOVA Marina Olegovna — Cand. Sc. (Biology), Associate Professor of the Department of Biology, Institute of Mathematics, Information Technology and Natural Sciences, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation, nayka@list.ru

БЕЛОВ Александр Сергеевич — доктор физико-математических, профессор кафедры фундаментальной математики, Институт математики, информационных технологий и естественных наук, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, asbelov2@mail.ru

BELOV Alexander Sergeevich — Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Institute of Mathematics, Information Technologies and Natural Sciences, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation, asbelov2@mail.ru

БОРИСОВА Елена Анатольевна — доктор биологических наук, зав. кафедрой биологии, Институт математики, информационных технологий и естественных наук, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, floraea@mail.ru

BORISOVA Elena Anatolyevna — Dr. Sc. (Biology), Head of the Department of Biology, Institute of Mathematics, Information Technologies and Natural Sciences, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation, floraea@mail.ru

ВОРОНОВА Тамара Александровна — кандидат педагогических наук, доцент, профессор кафедры непрерывного психолого-педагогического образования, Институт гуманитарных наук, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, vta5519@yandex.ru

VORONOVA Tamara Alexandrovna — Cand. Sc. (Pedagogics), Associate Professor, Professor of the Department of Continuing Psychological and Pedagogical Education, Institute of Humanities, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation, vta5519@yandex.ru

ЗАРИПОВ Владимир Николаевич — кандидат биологических наук, доцент кафедры биологии, Институт математики, информационных технологий и естественных наук, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, zaripow@mail.ru

ZARIPOV Vladimir Nikolaevich — Cand. Sc. (Biology), Associate Professor of the Department of Biology, Institute of Mathematics, Information Technology and Natural Sciences, Russian Federation, zaripow@mail.ru

ЗВОННИКОВ Виктор Иванович — доктор педагогических наук, профессор, профессор, кафедра непрерывного психолого-педагогического образования, Институт гуманитарных наук, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, zvonnikov@mail.ru

ZVONNIKOV Victor Ivanovich — Dr. Sc. (Pedagogics), Professor, Professor, Department of Continuing Psychological and Pedagogical Education, Institute of Humanities, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation, zvonnikov@mail.ru

ИВАНОВА Любовь Вячеславовна — студент 1 курса магистратуры Института математики, информационных технологий и естественных наук, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, zdrfvxc77@gmail.com

IVANOVA Lyubov Vyacheslavovna — 1st year Master's student at the Institute of Mathematics, Information Technologies and Natural Sciences, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation, zdrfvxc77@gmail.com

КАЗАНОВА Наталья Константиновна — аспирантка кафедры ботаники и микробиологии, Ярославский государственный университет им. Демидова, г. Ярославль, Россия, natalya.sotina@mail.ru

KAZANOVA Natalia Constantinovna — Postgraduate student of the Department of Botany and Microbiology, Yaroslavl State University. Demidova, Yaroslavl, Russian Federation, natalya.sotina@mail.ru

КЛЮЕВ Михаил Васильевич — доктор химических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной и прикладной химии, Институт математики, информационных технологий и естественных наук, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, klyuev@inbox.ru

KLYUEV Mikhail Vasilyevich — Dr. Sc. (Chemistry), Professor, Department of Fundamental and Applied Chemistry, Professor, Institute of Mathematics, Information Technologies and Natural Sciences, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation, klyuev@inbox.ru

КОГАЛОВСКИЙ Сергей Рувимович — кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики, физики и методики обучения, Ивановский государственный университет (Шуйский филиал), г. Шуя, Россия, askogal@yandex.ru

KOGALOVSKII Sergey Ruvimovich — Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Mathematics, Physics and Teaching Methods, Ivanovo State University (Shuya Branch), Shuya, Russian Federation, askogal@yandex.ru

КОРОЛЕВА Светлана Валерьевна — доктор медицинских наук, доцент профессор кафедры травматологии и ортопедии, Ивановская государственная медицинская академии МЗ РФ, г. Иваново, Россия, drqueen@mail.ru

KOROLEVA Svetlana Valeryevna — Dr. Sc. (the Medicine), Associate Professor, Professor of the Department of Traumatology and Orthopedics, Ivanovo State Medical Academy of the Ministry of Health of the Russian Federation, Ivanovo, Russian Federation, drqueen@mail.ru

КУРНИКОВА Ирина Валерьевна — кандидат экономических наук, доцент, директор Института социально-экономических наук, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, kyrnik@mail.ru

KOURNIKOVA Irina Valeryevna — Cand. Sc. (Economy), Associate Professor, Director of the Institute of Social and Economic Sciences, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation, kyrnik@mail.ru

КУСКОВСКИЙ Леонид Наумович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры финансов, бухгалтерского учета и банковского дела, Институт социально-экономических наук, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, ya.kyln@yandex.ru

KUSKOVSKY Leonid Naumovich — Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Finance, Accounting and Banking, Institute of Social and Economic Sciences, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation, ya.kyln@yandex.ru

ЛОГИНОВА Елена Давидовна — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной математики, Институт математики, информационных технологий и естественных наук, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, Loginova ed@mail.ru

LOGINOVA Elena Davidovna — Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Institute of Mathematics, Information Technologies and Natural Sciences, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation, Loginova ed@mail.ru

МАГДАЛИНОВА Наталья Александровна — кандидат химических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной и прикладной химии, Институт математики, информационных технологий и естественных наук, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, mn2408@mail.ru

MAGDALINOVA Natalia Aleksandrovna — Cand. Sc. (Chemical) Associate Professor, Department of Fundamental and Applied Chemistry, associate Professor, Institute of Mathematics, Information Technologies and Natural Sciences, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation, mn2408@mail.ru

МАЛЫГИН Алексей Александрович — кандидат педагогических наук, доцент, доцент, кафедра непрерывного психолого-педагогического образования, Институт гуманитарных наук, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, malygin@ivanovo.ac.ru

MALYGIN Alexey Alexandrovich — Cand. Sc. (Pedagogics), Associate Professor, Associate Professor, Department of Continuing Psychological and Pedagogical Education, Institute of Humanities, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation, malygin@ivanovo.ac.ru

МОЛДАВАНСКИЙ Давид Ионович — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник НОЦ ИНО, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, moldav@mail.ru

MOLDAVANSKIJ David Ionovich — Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Leading researcher of the REC INO, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation, moldav@mail.ru

СОЛОН Борис Яковлевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Институт математики, информационных технологий и естественных наук, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, bysolon@gmail.com

SOLON Boris Yakovlevich — Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Institute of Mathematics, Information Technologies and Natural Sciences, Ivanovo State University, Ivanovo, Russian Federation, bysolon@gmail.com

ЧЕЛЫШКОВА Марина Борисовна — доктор педагогических наук, профессор, главный специалист, Методический центр аккредитации специалистов, Первый Московский государственный медицинский университет им. И. М. Сеченова Министерства здравоохранения Российской Федерации (Сеченовский университет), г. Москва, Россия, mchelyshkova@mail.ru

CHELYSHKOVA Marina Borisovna — Cand. Sc. (Pedagogics), Professor, Chief Specialist, Methodological Center for Accreditation of Specialists, I. M. Sechenov First Moscow State Medical University of the Ministry of Health of the Russian Federation (Sechenov University), Moscow, Russian Federation, mchelyshkova@mail.ru

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ «ВЕСТНИКА ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА»

1. В журнал принимаются материалы в электронном виде в формате RTF с приложением одного экземпляра распечатки на белой бумаге.

Максимальный размер статьи — 1,0 авт. л. (20 страниц текста через 1,5 интервала, 30 строк на странице формата А4, не более 65 знаков в строке, выполненного в редакторе Microsoft Word шрифтом Times New Roman, кегль 14), сообщения — 0,5 авт. л. (10 страниц).

2. Материал для журнала должен быть оформлен в следующей последовательности: **УДК** (для естественных и технических специальностей), **ББК** (в библиографическом отделе библиотеки ИвГУ); на русском и английском языках: **инициалы и фамилия автора, название материала**, для научных статей — **аннотация** (объемом 10—15 строк), **ключевые слова; текст статьи** (сообщения).

3. Библиографические источники должны быть пронумерованы в алфавитном порядке, ссылки даются в тексте статьи в скобках в строгом соответствии с пристатейным списком литературы. Библиографическое описание литературных источников к статье оформляется в соответствии с ГОСТами 7.1—2003, 7.0.5—2008. В каждом пункте библиографического списка, составленного в алфавитном порядке (сначала произведения на русском языке, затем на иностранном), приводится одна работа. В выходных сведениях обязательно указание издательства и количества страниц, в ссылке на электронный ресурс — даты обращения.

4. Фотографии, прилагаемые к статье, должны быть черно-белыми, контрастными, рисунки — четкими.

5. В конце представленных материалов следует указать полный почтовый адрес автора, его телефон, фамилию, имя, отчество, ученую степень, звание, должность. Материал должен быть подписан всеми авторами.

6. Направление в редакцию ранее опубликованных и принятых к печати в других изданиях работ не допускается.

7. Редакция оставляет за собой право осуществлять литературную правку, корректирование и сокращение текстов статей.

8. Рукописи аспирантов публикуются бесплатно.

ПРАВИЛА РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ СТАТЕЙ

1. Статьи авторов, являющихся преподавателями, сотрудниками или обучающимися ИвГУ, принимаются редакционной коллегией соответствующей серии (выпуска) на основании письменного решения (рекомендации) кафедры или научного подразделения ИвГУ и рецензии доктора наук, не являющегося научным руководителем (консультантом), руководителем или сотрудником кафедры или подразделения, где работает автор.

2. Статьи авторов, не работающих и не обучающихся в ИвГУ, принимаются редакционной коллегией соответствующей серии (выпуска) на основании рекомендации их вуза или научного учреждения и рецензии доктора наук, работающего в ИвГУ.

3. Поступившие статьи проходят далее рецензирование одного из членов редколлегии соответствующей серии (выпуска), являющегося специалистом в данной области.

4. Статья принимается к публикации при наличии двух положительных рецензий и положительного решения редколлегии серии (выпуска). Порядок и очередность публикации статьи определяются в зависимости от объема публикуемых материалов и тематики выпуска.

5. В случае отклонения статьи автору направляется аргументированный отказ в письменной (электронной) форме. Авторы имеют право на доработку статьи или ее замену другим материалом.

Электронное сетевое издание

ВЕСТНИК
ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия «Естественные, общественные науки»
2021. Вып. 2

Издается в авторской редакции

директор издательства *Л. В. Михеева*
технический редактор *И. С. Сибирева*
компьютерная верстка *Т. Б. Земсковой*

Дата выхода в свет 29.12.2021 г.
Формат 70 × 108$^{1}/_{16}$. Уч.-изд. л. 5,0.

Издательство «Ивановский государственный университет»
✉ 153025 Иваново, ул. Ермака, 39 ☏ (4932) 93-43-41
E-mail: publisher@ivanovo.ac.ru