



Программа составлена в соответствии с требованиями федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования по программам магистратуры

## 1. Введение

Данная программа предназначена для сдачи вступительного экзамена по направлению подготовки 01.06.01 Математика и механика. Она состоит из указания тем и краткого описания их содержания, списка вопросов, литературы для подготовки к сдаче вступительного экзамена в аспирантуру.

## 2. Процедура экзамена

Экзамен проводится в устной форме по экзаменационному билету, включающему два вопроса.

Продолжительность подготовки ответа – 45 мин.

Результаты проведения вступительного экзамена оформляются ведомостью приемной комиссии по 100-балльной шкале.

Решение экзаменационной комиссии размещается на официальном сайте и на информационном стенде приемной комиссии не позднее трех дней с момента проведения вступительного экзамена.

## 3. Содержание программы вступительного экзамена в аспирантуру

### Краткое содержание разделов (по темам)

#### Введение в теорию групп

**Группы и подгруппы.** Полугруппы. Моноиды. Обратимые элементы моноида. Равносильные определения группы. Примеры групп. Абелевы группы. Порядок конечной группы. Группа вычетов. Подгруппы. Описание подгрупп группы  $Z$ .

**Группы преобразований.** Отображения множеств. Группа биективных преобразований множества и группа подстановок. Группы биективных преобразований в геометрии. Группы симметрий правильных многоугольников и многогранников.

**Гомоморфизмы групп.** Гомоморфизмы групп, их свойства. Ядро и образ гомоморфизма. Первая теорема о гомоморфизмах групп. Изоморфные группы. Абстрактные свойства групп. Теорема Кэли о вложении произвольной группы в группу преобразований. Линейные группы. Вложение произвольной конечной группы в общую линейную группу.

**Циклические группы, порядок элемента группы.** Порядок элемента группы, его свойства. Выражение порядка степени элемента через порядок этого элемента. Циклическая подгруппа и совпадение её порядка с порядком порождающего элемента. Циклические группы и их описание с точностью до изоморфизма. Теорема о подгруппах циклической группы. Квазициклическая группа и описание её подгрупп.

**Системы порождающих в группах, группы конечного ранга.** Подгруппы, порождённые множеством элементов – равносильные определения. Системы образующих в группах. Примеры порождающих множеств в группе подстановок и в группе чётных подстановок. Конечно порождённые группы. Локальная циклическость группы  $Q$ . Группы конечного общего ранга. Группы конечного специального ранга. Ранг абелевой группы. Описание абелевых групп без кручения ранга 1.

**Смежные классы группы по подгруппе.** Левые и правые смежные классы. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа о конечных группах. Нормальные подгруппы.

**Теоремы о гомоморфизмах и изоморфизмах групп.** Вторая теорема о гомоморфизмах групп. Теорема о соответствии подгрупп при естественном гомоморфизме. Теоремы об изоморфизмах.

**Прямые произведения групп.** Внешнее и внутреннее определение прямого произведения, их равносильность.

**Структурные теоремы о абелевых группах.** Теорема о строении конечной абелевой группы. Теорема о строении конечно порождённой абелевой группы.

**Аutomорфизмы групп.** Группа автоморфизмов группы. Внутренние автоморфизмы. Кольцо эндоморфизмов абелевой группы.

**Сопряженность в группе.** Классы сопряженности. Нормализаторы. Описание классов сопряженности в группе подстановок.

**Центр и коммутант группы.** Описание центра и коммутанта в группах подстановок, в группах четных подстановок, в общей линейной группе. Нетривиальность центра конечной  $p$ -группы.

**Действие группы на множестве.** Действие правыми сдвигами и сопряжениями Орбиты и стабилизаторы. Транзитивные действия.

**Теоремы Силова** о существовании  $p$ -подгрупп, о вложении  $p$ -подгрупп, о числе силовских  $p$ -подгрупп и о сопряженности силовских  $p$ -подгрупп.

**Конечные простые группы.** Простые конечные группы и теорема Галуа о простоте знаков переменных групп.

**Свободные абелевы группы.** Свободные абелевы группы конечного и бесконечного ранга. Линейно независимые системы элементов и базы. Абелевы группы как фактор-группы свободных абелевых групп. Теорема о подгруппах свободной абелевой группы.

**Нормальные и субнормальные ряды в группах.** Разрешимые, полициклические и нильпотентные группы (определения, примеры и простые свойства).

### Введение в теорию колец и полей

**Первоначальные сведения о кольцах.** Понятия кольца, тела, поля. Кольцо многочленов, кольцо формальных степенных рядов, матричные кольца, прямые суммы колец, внешнее присоединение единицы и другие способы построения колец. Левые, правые и двусторонние идеалы, фактор-кольца, гомоморфизмы колец, теоремы о гомоморфизмах и изоморфизмах. Максимальные и минимальные идеалы. Существование максимальных идеалов в кольце с единицей.

**Гомоморфизмы и фактор-кольца.** Гомоморфизмы колец. Двусторонние идеалы и фактор-кольца. Теоремы о гомоморфизмах и изоморфизмах колец.

**Линейные алгебры над полем.** Определение и примеры линейных алгебр над полем. Групповая алгебра. Алгебра кватернионов. Алгебры с делением. Теорема Фробениуса. Вложение конечно-мерной алгебры в матричную алгебру.

**Расширения полей.** Конечные и алгебраические расширения полей. Теорема о строении простого алгебраического расширения. Конечность (алгебраичность) башни расширений с конечными (алгебраическими) этажами. Поле алгебраических чисел. Поле разложения. Конечные поля. Алгебраическое замыкание поля. Теорема о примитивном элементе.

### **Примерный список вопросов к экзамену**

1. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп. Теорема Кэли о вложениях групп. Описание циклических групп с точностью до изоморфизма.
2. Смежные классы группы по подгруппе. Нормальные подгруппы, фактор-группы и естественный гомоморфизм.

3. Теорема о гомоморфизмах групп. Теорема о соответствии подгрупп при гомоморфизме.
4. Центр и коммутант группы.
5. Автоморфизмы и эндоморфизмы групп. Изоморфизм между группой внутренних автоморфизмов группы и фактор-группой этой группы по центру.
6. Сопряженность в группе. Понятие нормализатора подмножества и его свойства. Нетривиальность центра конечной  $p$ -группы.
7. Теорема Лагранжа и ее следствия, необратимость теоремы Лагранжа.
8. Действие группы на множестве.
9. Первая теорема Силова.
10. Вторая и третья теоремы Силова.
11. Прямые произведения групп. Строение конечной абелевой группы.
12. Строение конечно порожденной абелевой группы.
13. Нормальные и субнормальные ряды в группах. Разрешимые, полициклические и нильпотентные группы (определения, примеры и простые свойства).
14. Идеалы колец. Гомоморфизмы колец и фактор-кольца. Максимальные и минимальные идеалы.
15. Теоремы о гомоморфизмах колец и о соответствии подколец при естественном гомоморфизме.
16. Линейные алгебры над полем.
17. Конечные и алгебраические расширения полей. Теорема о строении простого алгебраического расширения.

### **Литература для подготовки**

#### *а) основная литература*

1. Архангельский А. В. Канторовская теория множеств. М.: МГУ. 1988.
2. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс. 2001.
3. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука. 1979.
4. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука. 1972.
5. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Т. 3. М.: Физ-мат. литература. 2001.
6. Кострикин А. И. Сборник задач по алгебре. М.: Факториал. 1995.
7. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. М.: Высшая школа. 1979.
8. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М.: Физ-мат литература. 1962.
9. Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука. 1967.
10. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука. 1970.
11. Молдаванский Д. И. Введение в теорию полей. Иваново. 1994.
12. Скорняков Л.А. Элементы алгебры. М.: Наука. 1980.
13. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М.: Наука. 2003.
14. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. М.: Наука. 1984.
15. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир. 1972.

#### *б) Дополнительная литература*

1. Винберг Э. Б. Алгебра многочленов. М.: Просвещение. 1980.
2. Коэн П. Теория множеств и континуум-гипотеза. М.: Мир. 1969.
3. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир. 1970.
4. Ленг С. Алгебра. М.: Мир. 1969.
5. Лидл Р., Ниддеррайтер Г. Конечные поля. М.: Мир. 1988.
6. Холл М. Теория групп. М.: ИЛ. 1962.