

# Всероссийская олимпиада школьников

## Муниципальный этап

### 8 класс

1. Петр взял два двухзначных числа, возвел каждое в квадрат и записал полученные числа друг за другом без пробела. Получилось некоторое восьмизначное число. Могут ли не менее пяти цифр в записи этого восьмизначного числа равняться 3?

Решение. Предположим, что такое возможно. Квадрат двузначного числа – число не более чем четырехзначное. Т.к. получилось восьмизначное число, то оба квадрата четырехзначные. Цифр 3 в полученной записи не менее 5, значит в записи одного из квадратов не менее трех цифр 3. Квадрат не может оканчиваться на цифру 3, значит это квадрат имеет вид  $\overline{333a}$ . Но  $57^2 = 3249$ ,  $58^2 = 3364$ . Следовательно, квадратов вида  $\overline{333a}$  не существует.

Критерии проверки:

0 баллов	Только ответ
1 балл	Замечено, что квадрат двузначного числа имеет не менее 4 знаков
2 балла	Показано, что оба квадрата четырехзначные
4 балла	Доказано, что оба квадрата четырехзначные и в одном из квадратов не менее 3-х цифр 3.
7 баллов	Обоснованно получен верный ответ

2. В классе больше 15, но меньше 30 учеников. При этом в классе тех, кто ходит в математический кружок, в 3 раза меньше тех, кто не ходит. А тех, кто ходит в химический кружок, в 6 раз меньше тех, кто не ходит. Сколько учеников в классе?

Решение. Пусть  $x$  учеников ходит в математический кружок, тогда  $3x$  учеников – не ходит. Всего учеников в классе –  $4x$  – делится на 4. Пусть  $y$  учеников ходит в химический кружок, тогда  $6y$  – не ходит. Всего учеников в классе  $7y$  – делится на 7. Таким образом, число учеников в классе делится на 4 и на 7, т.е – на 28. В диапазоне от 15 до 30 только одно число делится на 28 – 28.

Ответ: 28 учеников

### Критерии проверки

1 балл	Только верный ответ
2 балла	Показано, что число учеников делится на 4 или на 7 и дальнейших продвижений нет
4 балла	Показано, что число учеников делится на 28 и дальнейших продвижений нет
7 баллов	Обоснованно получен верный ответ

3. Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 2024. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличит на 1 ?

Решение.

$$ab - (a+1)(b-1) = 2024, ab - ab + a - b + 1 = 2024, a-b = 2023$$

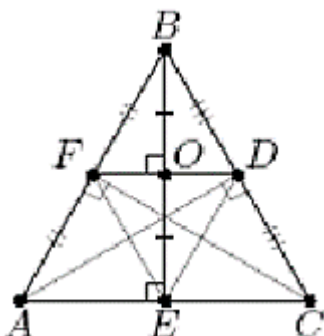
Рассмотрим

$$ab - (a-1)(b+1) = ab - ab - a + b + 1 = -(a-b) + 1 = -2023 + 1 = -2022$$

Ответ: уменьшится на 2022

2 балла	Только верный ответ
2 балла	Показано, что разность двух множителей равна 2023, дальнейших продвижений нет.
7 баллов	Обоснованно получен верный ответ

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF. Оказалось, что четырехугольник FBDE - ромб. Докажите, что треугольник ABC – равносторонний.



Решение.

Диагонали ромба

FBDE делятся точкой O пополам и взаимно

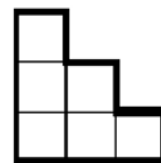
перпендикулярны. BE – высота, AC перпендикулярна BE и FD перпендикулярная BE, значит, FD и AC – параллельны.

Следовательно, треугольники ABC и FBD – подобны с коэффициентом  $\frac{1}{2}$ . Значит, AD и CF – медианы и высоты. Тогда  $AB = AC$  и  $BC = AC$ . Значит, треугольник ABC – равносторонний.

Критерии проверки:

2 балла	Доказано, что FD параллельно AC
3 балла	Доказано, что F и D – середины сторон AB и BC
7 баллов	Приведено верное доказательство

5. Клетчатая доска  $10 \times 10$  разрезана на шестиклеточные «лесенки» (см.рис.) и прямоугольники  $2 \times 1$ . Может ли оказаться, что «лесенок» ровно 15? (Лесенки и прямоугольники могут быть повернуты как угодно.)



Решение: Нет не может. Раскрасим нашу доску в два цвета – черный и белых «шахматной» раскраской. В каждом прямоугольнике  $1 \times 2$  будут клетки двух цветов, а в лесенке – 4 одного цвета и 2 другого цвета. «Лесенок» - 15, значит, они вместе покроют разное количество белых и черных клеток. Докажем это. Пусть  $x$  лесенок покрывают 4 белых и 2 черных, тогда  $15-x$  лесенок покрывают 2 белых и 4 черных. Тогда всего белых покрыто  $4x + 2(15-x) = 30 + 2x$ , а черных –  $2x + 4(15-x) = 60 - 2x$ . Если  $30 + 2x = 60 - 2x$ , то  $4x = 30$ ,  $x = 7,5$  клеток. Чего не может быть.

Добавляем прямоугольники и получаем, что на доске разное количество белых и черных клеток. А это неверно.

Критерии проверки:

0 баллов	Только ответ или ответ и попытки разместить фигурки на доске $10 \times 10$
2 балла	Доска раскрашена шахматной раскраской и замечено, что лесенка покрывает два клетки одного цвета и четыре клетки другого
5 баллов	Если приведена раскраска, утверждается что прямоугольники покрывают равное число белых и черных клеток, а лесенки вместе покрывают разное число белых и черных, но это не доказано в явном виде.
7 баллов	Обоснованно получен верный ответ, быть может, и другим способом.

